

質点の運動方程式の積分形の法則

2024-4-16 ^{*1}

高校物理 + α の力学の内容を体系的に復習するためのノート。運動方程式の積分で得られる法則や保存量についてまとめる。節番号や問題番号に*印がついているところは、難しいか、あまり重要ではないので、初めは読み飛ばしてもよい。(a) のようにアルファベットが付いた段落は、本文の内容から少し離れた補足的な内容である。『質点の運動方程式の解法』[PDF] を読み、微分方程式としての運動方程式の扱いに慣れていることが望ましい。

Table of Contents

1	運動方程式の積分と保存量	2
2	運動量の変化と力積の関係・運動量保存則	2
2.1	ひとつの質点の場合	2
2.2	複数の質点の場合	3
3	角運動量の変化と力積モーメントの関係・角運動量保存則	4
3.1	極座標における運動方程式と保存則	4
3.2	ひとつの質点の場合	5
3.3	複数の質点の場合	5
4	力学的エネルギーの変化と仕事の関係・力学的エネルギー保存則 (1次元の場合)	6
4.1	運動エネルギーの変化と仕事の関係	6
4.2	保存力とポテンシャルエネルギー	8
4.2.1	一様重力のポテンシャル	8
4.2.2	弾性力のポテンシャル	9
4.2.3	万有引力のポテンシャル	9
4.3	力学的エネルギーの変化と仕事の関係・力学的エネルギー保存則	9
5	力学的エネルギーの変化と仕事の関係・力学的エネルギー保存則 (3次元の場合)	10
5.1	運動エネルギーの変化と仕事の関係	10
5.2	保存力とポテンシャルエネルギー	12
5.2.1	一様重力のポテンシャル	13
5.2.2	弾性力のポテンシャル	13
5.2.3	万有引力のポテンシャル	13
5.3	力学的エネルギーの変化と仕事の関係・力学的エネルギー保存則	15
6*	Euler-Lagrange 方程式と Noether の定理 — Lagrange 形式の解析力学 —	16
6.1	Euler-Lagrange 方程式 — 一般化座標を用いた運動方程式 —	16
6.2	Noether の定理 — 連続的対称性と保存則 —	17

^{*1} 最新版は[ここ](#)からダウンロード可能。

1 運動方程式の積分と保存量

運動方程式 $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ を見ると、物体に力が働いていないとき、すなわち $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ のとき、

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

となり、運動量 $\mathbf{p}$ が時間的に変化しないことが直ちに分かる。系が時間発展しても一定に保たれる量のことを**保存量** (conserved quantity) と呼ぶ。^{*2} 力が働いていない物体の運動量が保存するという法則を**運動量保存則**という。^{*3} 一定の運動量を $\mathbf{p}_0$ と書こう。 $\mathbf{p}_0$ は初期条件で決まる。運動量は $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}}$ と書けるから、

$$m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{p}_0 \quad (1.2)$$

が得られる。運動方程式 $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ ($= \mathbf{0}$) が 2 階微分方程式であったのに対し、この方程式は 1 階微分方程式である。保存量がひとつ見つかることは運動方程式を 1 回積分したことと等価であり、運動方程式を解くという目的に一步近づいたことになる。さらには、系の保存量が見つければ、運動方程式を解かなくても、すなわち物体の位置 $\mathbf{r}$ を時刻 t の関数として求めなくても、系の性質について様々な情報を引き出すことができる。運動方程式が厳密には解析的に解けない (解が初等関数で表せない) 場合でも、保存則については解析的な表式が得られる場合も多い。

2 運動量の変化と力積の関係・運動量保存則

2.1 ひとつの質点の場合

物体に力が働いていないとき ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$) には運動方程式 $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ が簡単に積分できて、運動量保存則 $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ が得られたが、 $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ でも有用な積分形の法則を見出すことができる。運動方程式 $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ を、時間 $t \in [t_1, t_2]$ で積分してみよう。

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{p}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt. \quad (2.1)$$

左辺は、

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{p}} dt = \mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1) \quad (2.2)$$

と計算でき、運動量の変化を表す。一方、右辺は力 $\mathbf{F}$ が具体的に与えられていなければ計算することができないが、この積分を時刻 t_1 から t_2 における力 $\mathbf{F}$ による**力積** (impulse) と呼び、記号 $\mathbf{I}$ で表すことにする。

$$\mathbf{I} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt. \quad (2.3)$$

このようにして、運動量の変化はその間に加えられた力積に等しいという法則

$$\mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1) = \mathbf{I} \quad (2.4)$$

が得られた。特に、時刻 t_1 から t_2 の間の力積が $\mathbf{I} = \mathbf{0}$ のときには、 $\mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1) = \mathbf{0}$ より、

$$\mathbf{p}(t_2) = \mathbf{p}(t_1) \quad (2.5)$$

を得る。これは前述の**運動量保存則**である。力 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ のとき力積 $\mathbf{I} = \mathbf{0}$ であるから運動量が保存するが、^{*4} ひとつの質点の場合には運動量の保存は速度の保存を意味するから、運動量保存則は慣性の法則を述べているに過ぎない。運動量保存則が有用なのは、次節で扱うような複数の質点からなる系の解析である。なお、運動量の変化と力積の関係や運動量保存則はベクトル量についての関係式であるから、ベクトルの各成分ごとに成立することに注意。たとえば一様重力のみが働く場合、鉛直方向の運動量は保存しない (運動量の変化は重力による力積に等しい) が、水平方向の運動量は保存する。

^{*2} 第一積分 (first integral) や**運動の積分** (integral of motion), **運動の定数** (constant of motion) など、他にもいろいろな呼び方がある。

^{*3} 「運動量が保存される」よりも「運動量が保存する」という言い回しのほうがよく使われる。

^{*4} $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ でも適当な打ち消し合いの結果 $\mathbf{I} = \mathbf{0}$ となることはあるが、これはある特定の時刻のみで起こる特殊な状況であるから、あまり意味のある結果は得られない。

2.2 複数の質点の場合

運動量の変化と力積の関係、あるいはその特別な場合である運動量保存則は、複数の質点からなる系の問題に対して特に有用である。^{*5} N 個の質点からなる系を考え、質点に $i = 1, \dots, N$ の通し番号を付ける。 i 番目の質点の質量を m_i 、速度を $\mathbf{v}_i$ とし、 i 番目の質点の運動量を $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ と書く。また、 i 番目の質点に働く力 $\mathbf{F}_i$ を、 j ($\neq i$) 番目の質点から受ける内力 $\mathbf{F}_{ij}$ と、それ以外の外力 $\mathbf{F}_i^\times$ の和として、

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^\times \quad (2.6)$$

と書く。^{*6} ここで、作用反作用の法則より $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ が成り立つことに注意。^{*7} この式は、 $\mathbf{F}_{ii} \equiv \mathbf{0}$ と定義して、

$$\mathbf{F}_i = \sum_j \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^\times \quad (2.7)$$

と書いてもよい。以降、式の簡略化のためにこの定義を採用しよう。このとき、 i 番目の質点の運動方程式は、

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \sum_j \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^\times \quad (2.8)$$

となる。ここで、質点系の全運動量を $\mathbf{P} \equiv \sum_i \mathbf{p}_i$ と定義すれば、その時間微分は、

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \left(\sum_j \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^\times \right) = \sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij} + \sum_i \mathbf{F}_i^\times = \sum_i \mathbf{F}_i^\times \equiv \mathbf{F}^\times \quad (2.9)$$

と計算できる。ここで、 $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ より $\sum_{i,j} \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}$ となることを用い、外力の総和を $\mathbf{F}^\times$ と書いた。これを時間 $t \in [t_1, t_2]$ で積分すると、

$$\mathbf{P}(t_2) - \mathbf{P}(t_1) = \mathbf{I}^\times \quad (2.10)$$

が得られる。 $\mathbf{I}^\times \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}^\times dt$ は外力による力積である。この法則は、質点系の全運動量の変化はその間に加えられた外力による力積に等しいことを表している。内力は全運動量の変化に寄与しない。特に、時刻 t_1 から t_2 の間の外力による力積が $\mathbf{I}^\times = \mathbf{0}$ のときには、 $\mathbf{P}(t_2) - \mathbf{P}(t_1) = \mathbf{0}$ より、全運動量保存則

$$\mathbf{P}(t_2) = \mathbf{P}(t_1) \quad (2.11)$$

を得る。この法則は質点間に内力が働いていても成立することに注意。

(a) 質量中心の運動と全運動量 N 個の質点の全質量を $M \equiv \sum_i m_i$ と書き、系の質量中心 (center of mass)

$$\bar{\mathbf{r}} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \quad (2.12)$$

を定義すると、^{*8} 系の全運動量は

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = M \dot{\bar{\mathbf{r}}} \quad (2.13)$$

^{*5} 質点のみからなる系を質点系と呼ぶが、質点系という用語は「2 個以上の質点からなる系」のみを指すことが多い。字義からはひとつの質点も質点系と呼んで差し支えないので、この用法は適当ではないように思う。このノートでは「質点系」という用語そのものを使用しないことにする。

^{*6} 和の上端と下端は混乱がない場合には適当に省略する。たとえば、 $\sum_i = \sum_{i=1}^N$ や $\sum_{j \neq i} = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N = \sum_{j=1}^{j-1} + \sum_{j=j+1}^N$ の意味である。

^{*7} 物理学における「法則」は、それが成り立つと経験的に認める「原理」と、原理から導かれる「定理」のいずれも指すことがある曖昧な言葉である。物理学の「原理」は数学の「公理」に相当するが、公理と違い実験によって覆される可能性がある。そのため、物理学の原理は「経験則」とも呼ばれる。もちろん、数学の場合と同様、何を原理 (公理) とし、何を定理とするかには任意性がありうる。このノートでは、作用反作用の法則は他のいかなる原理や法則からも導かれない「原理」であるという立場をとるが、任意の孤立系で全運動量保存則が成り立つことを原理として作用反作用の法則を導くこともできる。磁場による Lorentz 力など作用反作用の法則が成立していないように見える例があるが、これは電磁場も運動量や角運動量を持つことを見落としているためであり、電磁場も含めた全系で見れば作用反作用の法則が成立している。

^{*8} 慣性中心とも呼ばれる。 $\bar{\mathbf{r}}$ は重心 (center of gravity) と呼ばれることがあるが、重心は重力によるトルクがゼロとなる点、すなわち $\sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G) \times m_i \mathbf{g}(\mathbf{r}_i) = \mathbf{0}$ により定義される点 $\mathbf{r}_G$ であり、質量中心とは異なる。しかし、一様重力の場合には両者は一致するので、しばしば同じ意味で用いられる。

と書くことができ、質量 M の質点が質量中心の速度 $\dot{\bar{\mathbf{r}}}$ で運動する場合の運動量に等しいことが分かる。この事実により、大きさのある物体を質点として扱ったり、複数の物体を合わせてひとつの物体として扱ったりして運動を解析することが正当化される。質量中心から見た座標 $\mathbf{r}_i^* \equiv \mathbf{r}_i - \bar{\mathbf{r}}$ を定義すると、^{*9}

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i^* = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \bar{\mathbf{r}}) = \sum_i m_i \mathbf{r}_i - \left(\sum_i m_i \right) \bar{\mathbf{r}} = M \bar{\mathbf{r}} - M \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

が成り立つ。 $\mathbf{p}_i^* \equiv m_i \dot{\mathbf{r}}_i^*$ と定義すると、以下の関係式も成り立つ。

$$\sum_i \mathbf{p}_i^* = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^* = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}_i^* = \mathbf{0} . \quad (2.15)$$

3 角運動量の変化と力積モーメントの関係・角運動量保存則

3.1 極座標における運動方程式と保存則

運動方程式の形から運動量保存則（あるいは運動量の変化と力積の関係）が直ちに得られたが、運動方程式を別の座標系を使って書き換えることで、別の保存則（あるいは積分形の法則）を見出すことができる。2次元平面における運動を考える。極座標 (r, θ) を $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ で導入し、極座標の基本ベクトルを $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ とすると、

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r , \quad (3.1)$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \equiv v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta , \quad (3.2)$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta \equiv a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta , \quad (3.3)$$

という関係が得られるから、極座標における運動方程式は、

$$m(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = F_r , \quad (3.4)$$

$$m(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) = F_\theta , \quad (3.5)$$

と書ける。ここで、 $\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta$ と書いた。第2式の左辺は

$$m(r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (m r v_\theta) \quad (3.6)$$

と書き直すことができるから、第2式は

$$\frac{d}{dt} (m r v_\theta) = r F_\theta \quad (3.7)$$

と書ける。これより、 $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ でも $F_\theta = 0$ であれば $m r v_\theta$ が保存することが分かる。 $F_\theta = 0$ のとき $\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r$ であり、力は動径方向を向く。このような力を**中心力**という。ここで、補助的に z 軸を2次元平面と垂直な方向にとると、ベクトルの外積を用いて

$$m r v_\theta = m |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| , \quad (3.8)$$

$$r F_\theta = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| , \quad (3.9)$$

と書くことができる。 $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ と $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ はいずれも z 軸方向を向くから、

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.10)$$

と書ける。この方程式と運動方程式 $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ には対応関係が見える。このように、運動方程式を異なる座標系で書き直すことで、運動量保存則以外の保存則（あるいは積分形の法則）が見つかることがある。

^{*9} このノートでは質量中心から見た量に記号 $\star$ をつけて表すことにするが、この表記は全く一般的ではないので注意。

3.2 ひとつの質点の場合

前節で現れた $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ という量の時間微分を、2次元平面内の運動に限らず一般の場合に計算してみると、

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

となり、一般の場合にも同じ方程式が成り立つことが分かる。ここで、 $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ を用いた。角運動量 $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ とトルク $\mathbf{N} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ を定義すれば、^{*10} この式は以下のように書ける。

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N} . \quad (3.12)$$

つまり、角運動量の時間変化率はトルクに等しい。運動方程式 $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ との類似性は明らかであろう。この方程式を時間 $t \in [t_1, t_2]$ で積分することで

$$\mathbf{L}(t_2) - \mathbf{L}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathbf{N} \quad (3.13)$$

が得られる。^{*11} 特に、質点に働くトルク $\mathbf{N}$ がゼロのときには、角運動量保存則

$$\mathbf{L}(t_2) - \mathbf{L}(t_1) = \mathbf{0} , \quad \therefore \mathbf{L}(t_2) = \mathbf{L}(t_1) , \quad (3.14)$$

が得られる。トルク $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ということは、 $\mathbf{F}$ と $\mathbf{r}$ が平行 ($\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$) ということであるから、 $\mathbf{F}$ は中心力 $\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r$ である。したがって、角運動量保存則は、中心力のみが働くとき角運動量は保存するという意味している。角運動量保存則はベクトル量に対する法則であるから、運動量保存則と同様に、各成分ごとに成立する。角運動量についての積分形の法則を運動方程式から直接導きたければ、運動方程式 $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ と $\mathbf{r}$ との外積をとり、時間 $t \in [t_1, t_2]$ で積分すればよい。

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r} \times \mathbf{F} dt . \quad (3.15)$$

右辺はトルク $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ の時間積分であり、左辺は $d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})/dt = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}$ を用いて、

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) dt = \mathbf{L}(t_2) - \mathbf{L}(t_1) \quad (3.16)$$

と計算できる。

3.3 複数の質点の場合

運動量についての議論と同様に、 N 個の質点からなる系を考える。各質点の角運動量 $\mathbf{L}_i \equiv \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ の時間微分は

$$\dot{\mathbf{L}}_i = \mathbf{N}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_i \times \left(\sum_j \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_i^\times \right) = \sum_j \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{N}_i^\times \quad (3.17)$$

と書くことができる。質点 i に働く力 $\mathbf{F}_i$ を内力 $\mathbf{F}_{ij}$ と外力 $\mathbf{F}_i^\times$ とに分け、外力によるトルクを $\mathbf{N}_i^\times \equiv \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^\times$ と定義した。系の全角運動量を $\mathbf{L} \equiv \sum_i \mathbf{L}_i$ で定義すると、その時間微分は、

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i \dot{\mathbf{L}}_i = \sum_i \left(\sum_j \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{N}_i^\times \right) = \sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{N}^\times \quad (3.18)$$

と書ける。外力によるトルクの総和を $\mathbf{N}^\times \equiv \sum_i \mathbf{N}_i^\times$ と書いた。和をとる変数 i と j は自由に変更してもよいので、

$$\sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i,j} \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} \quad (3.19)$$

^{*10} トルクは力のモーメントとも呼ばれる。

^{*11} 右辺の量は「力積モーメント」や「角力積」と呼ばれることがあるようだが、どちらの用語もそれほど一般的ではないと思う。また、力積に $\mathbf{I}$ という文字を当てたのに対し、力積モーメントには (それほど有用ではないので) 特に新しい文字を当てずに、単にトルク $\mathbf{N}$ の時間積分として書くことにする。

と書くことができる．作用反作用の法則 $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ を用いた．ここでさらに $\mathbf{F}_{ij}$ と $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ とが平行な場合には、^{*12}
 $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}$ となるから、質点系の全角運動量の時間変化率は外力によるトルクに等しいという法則

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}^\times \quad (3.20)$$

が得られる．これを時刻 t_1 から t_2 まで時間で積分することで、質点系の全角運動量の変化についての法則が得られる．

$$\mathbf{L}(t_2) - \mathbf{L}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathbf{N}^\times . \quad (3.21)$$

もちろん、外力によるトルクが $\mathbf{N}^\times = \mathbf{0}$ のときには、系の全角運動量は保存する．

(a) 質量中心と相対運動の角運動量 全角運動量は

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i m_i (\bar{\mathbf{r}} + \mathbf{r}_i^*) \times (\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\mathbf{r}}_i^*) \\ &= \bar{\mathbf{r}} \times \left(\sum_i m_i \right) \dot{\bar{\mathbf{r}}} + \bar{\mathbf{r}} \times \underbrace{\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^*}_{=\sum_i \mathbf{p}_i^* = \mathbf{0}} + \underbrace{\left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i^* \right) \times \dot{\bar{\mathbf{r}}}}_{=\mathbf{0}} + \sum_i m_i \mathbf{r}_i^* \times \dot{\mathbf{r}}_i^* \\ &= \bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{P} + \sum_i \mathbf{r}_i^* \times \mathbf{p}_i^* \end{aligned} \quad (3.22)$$

と書ける．質量中心の角運動量 $\bar{\mathbf{L}} \equiv \bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{P}$ と相対運動の角運動量 $\mathbf{L}_i^* \equiv \mathbf{r}_i^* \times \mathbf{p}_i^*$ の和 $\mathbf{L}^* \equiv \sum_i \mathbf{L}_i^* = \sum_i \mathbf{r}_i^* \times \mathbf{p}_i^*$ を定義すると、全角運動量 $\mathbf{L}$ は、質量中心の角運動量 $\bar{\mathbf{L}}$ と相対運動の角運動量 $\mathbf{L}^*$ の和として与えられる．^{*13}

$$\mathbf{L} = \bar{\mathbf{L}} + \mathbf{L}^* . \quad (3.23)$$

全運動量と異なり全角運動量は原点の選び方に依存するが、 $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ を満たす質量中心の静止系では、全角運動量は相対角運動量に一致し、原点の選び方に依らない．

4 力学的エネルギーの変化と仕事の関係・力学的エネルギー保存則 (1次元の場合)

第2章と第3章で見てきたように、運動方程式を定積分することにより、積分の端点 (始点と終点) における物理量の変化についての法則が得られた．そこで、今度は時間 t ではなく位置 $\mathbf{r}$ で運動方程式を定積分することを考える．ここで現れるのがエネルギーという概念である．本章ではまず簡単な1次元の運動について解析し、次章で3次元の運動について議論する．

4.1 運動エネルギーの変化と仕事の関係

まずは議論の簡単化のためにひとつの質点の運動を考えよう．^{*14} 1次元の運動方程式 $m\ddot{x} = F$ を区間 $x \in [x_1, x_2]$ で定積分したいが、往復運動のように同じ場所を複数回通るような (x が単調ではない) 運動の場合には、端点 x_1 と x_2 を決めただけでは積分を一意的に定めることができない．時刻 t が単調増加するパラメータであり、端点 t_1 と t_2 により時間積分が一意的に定まったのとは対照的である．さらに、2次元や3次元空間での運動では、初期位置 $\mathbf{r}_1$ から終位置 $\mathbf{r}_2$

^{*12} $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ を「作用反作用の弱法則」と呼び、これに $\mathbf{F}_{ij} \parallel (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ を加えて「作用反作用の強法則」と呼ぶことがある．全運動量保存則には弱法則が、全角運動量保存則には強法則がそれぞれ必要である．自然界では強法則が成立していることが経験則としてわかっている．作用反作用の強法則を原理とする代わりに、系の内力の総和と内力のトルクの総和がともに $\mathbf{0}$ になることを原理 (経験則) として要請することもできる．内力が二体力 (2つの質点の相互作用の和として表すことができる力) の場合には両者は等価であるが、一般の多体力 (相互作用の和に分解できない力) が働く場合には「作用・反作用」が意味を失うので、その場合は後者を原理として採用すべきである．あるいは、もう少し話を進めて、外力が働かない任意の孤立系で全運動量と全角運動量が保存することを原理として要請することもできる．付録 6.2 で見るように保存則の存在は系の対称性と密接に関わっているので、物理法則の対称性を重視する現代的な視点では、作用反作用の法則の代わりに孤立系での全運動量と全角運動量の保存を原理として採用するほうが自然かもしれない．

^{*13} 「質量中心の角運動量」は正確には「質量中心 $\bar{\mathbf{r}}$ にあり運動量 $\mathbf{P}$ で運動する (仮想的な) 質点の角運動量」と呼ぶべきものである．

^{*14} 複数の質点からなる系については3次元の運動を議論する次章で扱う．ここで扱わないのは、内力の総和や内力によるトルクの総和が $\mathbf{0}$ になったのとは対照的に、内力による仕事は 0 とはならないので、複数の質点の全運動エネルギーの変化についてあまり有用な法則が得られないという事情もある．

への経路は無数の可能性がある．この問題を解決するためには，端点 x_1 と x_2 だけでなく運動の経路そのものを指定して，「運動の経路に沿った積分」を考える必要がある．まず，質点の運動の経路を

$$C : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto x(t) \quad (4.1)$$

のように時刻 t で媒介変数表示する．*15 $x = x(t)$ は $x(t_1) = x_1$ と $x(t_2) = x_2$ を満たす運動方程式の解である．そして，積分範囲として端点を書く代わりに，

$$\int_C m\ddot{x} dx = \int_C F dx \quad (4.2)$$

のように経路 C を積分記号の下部に書くことで，運動の経路 C に沿った積分であることを表す．積分経路 C 上では $dx = \dot{x} dt$ であるから，経路 C に沿って位置 x_1 から x_2 まで積分することは，速度 $v = \dot{x}$ をかけて時間 $t \in [t_1, t_2]$ で積分することと定義する．

$$\int_C (\cdots) dx \equiv \int_{t_1}^{t_2} (\cdots) \dot{x} dt . \quad (4.3)$$

つまり，運動方程式を位置 x で積分するという我々の目的を実現するためには，運動方程式 $m\ddot{x} = F$ に速度 $v = \dot{x}$ をかけて時間 $t \in [t_1, t_2]$ で積分すればよい．

$$\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x} \dot{x} dt = \int_{t_1}^{t_2} F \dot{x} dt . \quad (4.4)$$

左辺は

$$\int_C m\ddot{x} dx = \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x} \dot{x} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 \right) dt = \frac{1}{2} m\dot{x}(t_2)^2 - \frac{1}{2} m\dot{x}(t_1)^2 = K(t_2) - K(t_1) \quad (4.5)$$

と計算できる．ここで，**運動エネルギー** (kinetic energy)

$$K \equiv \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (4.6)$$

を定義した．右辺は経路 C に沿った**仕事** (work) と呼ばれる．これを W_C と書こう．

$$W_C \equiv \int_C F dx = \int_{t_1}^{t_2} F \dot{x} dt . \quad (4.7)$$

以上より，運動方程式を経路 C に沿って位置 x_1 から x_2 まで積分することで，運動エネルギーの変化と仕事の関係

$$K(t_2) - K(t_1) = W_C \quad (4.8)$$

が得られた．

問 1 粗い水平面上で質量 m の物体を初速 v_0 で滑らせたとき，物体が静止するまでの距離を求めよ．ただし，動摩擦力は物体の速度と逆向きで大きさは垂直抗力に比例するとし，その比例定数 (動摩擦係数) を μ' とする．

解答 鉛直方向の力のつりあいより垂直抗力は $N = mg$ であるから，動摩擦力の大きさは $f = \mu' mg$ である．求める距離を l とすると，運動エネルギーの変化と仕事の関係より，

$$0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\mu' m g l , \quad \therefore l = \frac{v_0^2}{2\mu' g} . \quad (4.9)$$

§ 運動エネルギーの時間変化率と仕事率 運動エネルギー $K = (1/2)m\dot{x}^2$ を時間 t で微分して，運動方程式 $m\ddot{x} = F$ を用いることで，

$$\dot{K} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = m \dot{x} \ddot{x} = F \dot{x} \quad (4.10)$$

*15 媒介変数は単調 (増加) でさえあれば時刻 t でなくてもよいが，ここでは媒介変数を時刻以外に選ぶ必要性がないだろう．経路 C を表すために集合の記法を用いて $C = \{x(t) \mid t \in [t_1, t_2]\}$ と書くこともあるが，本文で述べたように $x(t)$ が単調でない場合に困るし，経路の方向を「媒介変数が増加する向き」などと補助的に指定する必要があるので，ここでは経路を写像として与えた．「 $C : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto C(t)$ 」や「 $x : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto x(t)$ 」が正統かもしれないが，見た目のわかりやすさを重視して，あえて別の文字を使った．

という関係が得られる． $P \equiv F\dot{x}$ は**仕事率** (power) と呼ばれる量であり，単位時間あたりに力 F がする仕事を表す．^{*16} これより，運動エネルギーの時間変化率は仕事率に等しいという法則が得られる．

$$\dot{K} = P. \quad (4.11)$$

運動方程式 $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ や角運動量の時間変化率とトルクの関係 $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$ との類似性は明らかである．経路 C に沿った仕事 W_C は，仕事率 P を用いて

$$W_C = \int_C F dx = \int_{t_1}^{t_2} F \dot{x} dt = \int_{t_1}^{t_2} P dt \quad (4.12)$$

と書くことができる．

4.2 保存力とポテンシャルエネルギー

位置 x のみに依存し，速度 $\dot{x}$ や時刻 t に依らない力 $F(x)$ を考えよう．Hooke の法則に従うバネの弾性力 $F = -kx$ のような力を想定すればよい． $F(x)$ が x の連続関数であれば，適当な点 x_0 を基準点とした不定積分 (の符号を変えたもの)

$$U(x) \equiv - \int_{x_0}^x F(s) ds = \int_x^{x_0} F(s) ds \quad (4.13)$$

が存在する．^{*17} 逆に，関数 $U(x)$ が与えられれば，微分積分学の基本定理より，^{*18} 力 $F(x)$ は

$$F(x) = -U'(x) = -\frac{d}{dx}U(x) \quad (4.14)$$

で求めることができる．関数 $U(x)$ は**位置エネルギー**または**ポテンシャルエネルギー** (potential energy)，あるいは単に**ポテンシャル**と呼ばれる．ポテンシャル $U(x)$ は「ポテンシャルが減少する方向に力が働く」ように負号をつけて定義されている．ポテンシャルを山の高さに見立てて，山を下る方向に力が働くようなイメージをするとよい．ポテンシャルを運動の経路上の点 $x(t)$ で評価した $U(x(t))$ を時刻 t の関数とみなして微分してみると，

$$\frac{d}{dt}U(x(t)) = U'(x(t)) \dot{x}(t) = -F(x(t)) \dot{x}(t) \quad (4.15)$$

が得られる．これを用いると，力 $F(x)$ の経路 C に沿った仕事は，

$$W_C = \int_C F(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} F(x(t)) \dot{x}(t) dt = [-U(x(t))]_{t_1}^{t_2} = -U(x_2) + U(x_1) \quad (4.16)$$

と計算でき，途中の経路に依らず端点 x_1 と x_2 のみで値が定まることが分かる．このように，仕事は途中の経路に依らず端点のみで決まるような力を**保存力** (conservative force) と呼ぶ．したがって，保存力 F のする仕事は

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx \quad (4.17)$$

のように位置 $x \in [x_1, x_2]$ における積分の形で書いてよく，経路 C を明示する必要もない．この積分はもはや運動の経路に沿って行う必要はなく， x_1 と x_2 を結ぶ任意の (実際の運動とは関係のない仮想的な) 経路で実行してよい．1 次元の運動の場合，位置 x のみに依存する力 $F(x)$ は (連続であれば) 全て保存力である．以下で，いくつかの代表的な保存力のポテンシャルを導出する．

4.2.1 一様重力のポテンシャル

鉛直上向きに y 軸をとり，一様重力を $F(y) = -mg$ と表すと，ポテンシャルは，

$$U(y) = - \int_{y_0}^y F(s) ds = \int_{y_0}^y mg ds = mg(y - y_0). \quad (4.18)$$

ふつうは基準点を $y_0 = 0$ に選んで，

$$U(y) = mgy. \quad (4.19)$$

^{*16} P は全運動量 $\mathbf{P}$ と紛らわしいが，他に適当な文字がないので仕方なく用いる．

^{*17} 積分範囲に x を用いているので，積分変数には x 以外の文字 (ここでは s とした) を使うべきであるが，あまり混乱の心配は無いので同じ文字を使っている文献も多い．

^{*18} $\frac{d}{dx} \int_a^x f(s) ds = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(s) ds - \int_a^x f(s) ds \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(s) ds = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x)h + \mathcal{O}(h^2)] = f(x).$

4.2.2 弾性力のポテンシャル

Hooke の法則に従うバネ定数 k のバネの弾性力 $F(x) = -kx$ のポテンシャルは,

$$U(x) = - \int_{x_0}^x F(s) ds = \int_{x_0}^x ks ds = \frac{1}{2}k(x^2 - x_0^2) . \quad (4.20)$$

ふつうは基準点を $x_0 = 0$ に選んで,

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 . \quad (4.21)$$

4.2.3 万有引力のポテンシャル

質量 M の中心天体の位置を原点とし, x 軸上を運動する質量 m の質点に働く万有引力は,

$$F(x) = -\frac{GMm}{x^2} \quad (4.22)$$

と表すことができる. このポテンシャルは

$$U(x) = - \int_{x_0}^x F(s) ds = \int_{x_0}^x \frac{GMm}{s^2} ds = -GMm \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right) \quad (4.23)$$

と計算できる. ふつうは基準点を無限遠点 ($x_0 \rightarrow \infty$) として,

$$U(x) = -\frac{GMm}{x} . \quad (4.24)$$

4.3 力学的エネルギーの変化と仕事の関係・力学的エネルギー保存則

質点に働く力 F が保存力の場合には, そのポテンシャルを U として, 運動エネルギーの変化と仕事の関係は,

$$K(t_2) - K(t_1) = W = -U(x_2) + U(x_1) \quad (4.25)$$

と書ける. これを整理して, **力学的エネルギー保存則**

$$K(t_2) + U(x_2) = K(t_1) + U(x_1) \quad (4.26)$$

を得る. **力学的エネルギー**は運動エネルギーとポテンシャルの和として定義される. 質点に保存力以外の力 F' が働いている場合には, その力による仕事を W'_C と書いて, 力学的エネルギーの変化と仕事の関係を得る.

$$(K(t_2) + U(x_2)) - (K(t_1) + U(x_1)) = W'_C . \quad (4.27)$$

もちろん W'_C は保存力による仕事を含んでいてもよい.

問 2 一様な重力場中の鉛直方向の運動 $y(t) = y_0 + v_0 t - gt^2/2$ で力学的エネルギー保存則を確かめよ.

解答 速度は $v(t) = \dot{y}(t) = v_0 - gt$ より, 運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_0 - gt)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mv_0gt + \frac{1}{2}mg^2t^2 . \quad (4.28)$$

ポテンシャルは

$$U = mgy = mg \left(y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \right) = mgy_0 + mgv_0t - \frac{1}{2}mg^2t^2 . \quad (4.29)$$

したがって, 力学的エネルギーは,

$$K + U = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgy_0 (= K_0 + U_0) \quad (4.30)$$

となり, 任意の時刻での力学的エネルギーは, 初期時刻 $t = t_0$ における力学的エネルギーと等しいことが分かる.

問 3 単振動の一般解 $x(t) = C \sin(\omega t + \phi)$ で力学的エネルギー保存則を確かめよ. ただし, $\omega \equiv \sqrt{k/m}$ である.

解答 速度は $v(t) = \dot{x}(t) = \omega C \cos(\omega t + \phi)$ より、運動エネルギーは、

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 C^2 \cos^2(\omega t + \phi) . \quad (4.31)$$

ポテンシャルは、

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k^2 C^2 \sin^2(\omega t + \phi) . \quad (4.32)$$

したがって、力学的エネルギーは、 $k = m\omega^2$ を用いて、

$$K + U = \frac{1}{2}m\omega^2 C^2 . \quad (4.33)$$

問 4 水平面に対して角度 θ を持つ長さ l の滑らかな斜面の頂上から質点を静かに滑らせたとき、質点が水平面に到達したときの速さを求めよ。

解答 求める速さを v とすると、力学的エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgl \sin \theta , \quad \therefore v = \sqrt{2gl \sin \theta} . \quad (4.34)$$

問 5 前問で、垂直抗力に比例する動摩擦力 (動摩擦係数 μ') が働く場合、質点が水平面に到達したときの速さを求めよ。

解答 求める速さを v とすると、力学的エネルギーの変化と仕事の関係より、

$$\left(\frac{1}{2}mv^2 + 0 \right) - (0 + mgl \sin \theta) = -\mu' mgl \cos \theta , \quad \therefore v = \sqrt{2gl(\sin \theta - \mu' \cos \theta)} . \quad (4.35)$$

(b) 運動方程式から力学的エネルギー保存則を導く技巧 保存力 $F(x) = -U'(x)$ のみが働く場合の運動方程式 $m\ddot{x} = -U'(x)$ を $m\ddot{x} + U'(x) = 0$ と書き直して、速度 $\dot{x}$ をかけて整理すると、

$$0 = m\dot{x}\ddot{x} + U'(x)\dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) \right) \quad (4.36)$$

となり、力学的エネルギー保存則が導かれる。運動方程式に速度をかけて力学的エネルギー保存則を導くテクニックはよく使われる。

問 6 単振り子の運動方程式 $ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$ に速度 $v_\theta = l\dot{\theta}$ をかけて力学的エネルギー保存則を導け。

解答 運動方程式を $ml\ddot{\theta} + mg \sin \theta = 0$ と書き直して速度 $v_\theta = l\dot{\theta}$ をかけて整理すると、

$$0 = ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta} \sin \theta = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 - mgl \cos \theta \right) . \quad (4.37)$$

$K = m(l\dot{\theta})^2/2 = mv_\theta^2/2$ は運動エネルギー、 $U = -mgl \cos \theta$ は $\theta = \pi/2$ を基準としたポテンシャルエネルギーであるから、これは力学的エネルギー保存則である。単振り子の運動方程式は $\sin \theta \simeq \theta$ の近似無しでは解析的に解けないが、力学的エネルギー保存則は解析的な表式が得られる。

5 力学的エネルギーの変化と仕事の関係・力学的エネルギー保存則 (3次元の場合)

5.1 運動エネルギーの変化と仕事の関係

1次元の場合の議論を参考にして、運動方程式をどのように積分すれば運動エネルギーの変化と仕事の関係を得ることができるかを考えてみる。3次元における運動エネルギーを以下のように定義しよう。^{*19}

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 . \quad (5.1)$$

^{*19} ベクトル $\mathbf{a}$ の大きさを $a \equiv |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ と書く慣例に倣った。

運動エネルギーを時間で微分して、運動方程式 $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ を用いると、

$$\dot{K} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \right) = m \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (5.2)$$

となる。^{*20} そこで、3次元における仕事率を

$$P \equiv \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (5.3)$$

と定義すると、1次元の場合と同様に、運動エネルギーの時間変化率は仕事率に等しいという関係

$$\dot{K} = P \quad (5.4)$$

が得られる。仕事率 $P = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ が力 $\mathbf{F}$ と速度 $\dot{\mathbf{r}}$ の内積の形で書かれることから、力 $\mathbf{F}$ のうち、物体の運動の方向（つまり速度 $\dot{\mathbf{r}}$ の方向）に沿った成分のみが運動エネルギーを変化させることが分かる。例えば、磁場による Lorentz 力のように常に運動方向と垂直に働く力は、運動エネルギーを変化させない。1次元の場合と同様にして、仕事率 $P = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ を運動の経路

$$C : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^3; t \mapsto \mathbf{r}(t) \quad (5.5)$$

に沿って時間積分することで、経路 C に沿った仕事の表式が得られる。

$$W_C = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \quad (5.6)$$

ここで、

$$\int_C (\dots) \cdot d\mathbf{r} \equiv \int_{t_1}^{t_2} (\dots) \cdot \dot{\mathbf{r}} dt \quad (5.7)$$

と定義した。このように、3次元空間内の経路（曲線）に沿った積分を**線積分** (line integral) と呼ぶ。^{*21} ここでは媒介変数を時刻 t に選んだが、線積分における媒介変数の変換は単なる置換積分であるから、線積分の値は経路の媒介変数表示の仕方に依らない。以上から、3次元の運動方程式 $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ から運動エネルギーの変化と仕事の関係を得るためには、運動方程式の両辺を経路 C に沿って線積分すればよいことが分かる。

$$\int_C m\ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \quad (5.8)$$

実際、左辺は

$$\int_C m\ddot{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \right) dt = K(t_2) - K(t_1) \quad (5.9)$$

と計算でき、3次元の場合にも運動エネルギーの変化と仕事の関係が得られる。

$$K(t_2) - K(t_1) = W_C . \quad (5.10)$$

問 7 常に速度と逆向きに働く一定の大きさの動摩擦力が運動の経路 C に沿って行う仕事の表式を求めよ。

解答 動摩擦力を $\mathbf{f}$ とすると、これが速度 $\dot{\mathbf{r}}$ と常に逆向きであるという条件より、 $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt = -f|\dot{\mathbf{r}}| dt = -f|d\mathbf{r}|$ と書ける。したがって、運動の経路 C に沿った動摩擦力の仕事 W_C は、

$$W_C = \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = -f \int_C |d\mathbf{r}| = -f l_C \quad (5.11)$$

と書ける。ここで、

$$l_C \equiv \int_C |d\mathbf{r}| = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{r}}| dt \quad (5.12)$$

は経路 C の長さ、すなわち物体の移動距離である。動摩擦力による仕事は経路に依存することが分かる。

^{*20} $\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}^2) = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z} = 2[\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}] \cdot [\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}] = 2\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}$.

^{*21} 経路に沿った積分なので「経路積分」(path integral) と呼びたくなるが、この用語は量子力学の別の概念に使われている。

(a) 質量中心と相対運動の運動エネルギー N 個の質点からなる系の全運動エネルギーは,

$$\begin{aligned}
 K &\equiv \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_i^*)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \right) \dot{\mathbf{r}}^2 - \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \cdot \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^*}_{=0} + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{r}}_i^*)^2 \\
 &= \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{r}}_i^*)^2
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

と書ける. 質量中心の運動エネルギー $\bar{K} \equiv (1/2)M\dot{\mathbf{r}}^2$ と相対運動エネルギー $K^* \equiv \sum_i (1/2)m_i(\dot{\mathbf{r}}_i^*)^2$ を定義すれば, 全運動エネルギー K は質量中心の運動エネルギー $\bar{K}$ と相対運動エネルギー K^* の和として与えられる.

$$K = \bar{K} + K^* . \tag{5.14}$$

5.2 保存力とポテンシャルエネルギー

1次元の場合に倣って, 仕事途中の経路に依らず端点のみで決まるような力を**保存力**と呼ぶ. 1次元の場合には位置 x のみに依存する力 $F(x)$ は (連続であれば) 全て保存力であったが, 3次元では位置 $\mathbf{r}$ のみの関数であっても保存力とは限らない. 力 $\mathbf{F}$ が保存力である場合には, 基準点 $\mathbf{r}_0$ から $\mathbf{r}$ までの適当な経路 C に沿った $\mathbf{F}$ の線積分 (の符号を変えたもの) として, ポテンシャル $U(\mathbf{r})$ を以下のように定義することができる.*22

$$U(\mathbf{r}) \equiv - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} . \tag{5.15}$$

線積分で積分の上端と下端を示す書き方をしてもよいのは積分が経路 C に依存しない保存力の場合のみであることに注意. ポテンシャル $U(\mathbf{r})$ は $\mathbf{r}$ から $\mathbf{r}_0$ までの適当な経路に沿って保存力 $\mathbf{F}$ が行う (仮想的な) 仕事である. あるいは, 保存力とつり合う力 $-\mathbf{F}$ が $\mathbf{r}_0$ から $\mathbf{r}$ で行う仕事と言ってもよい. もちろん, 線積分は, 経路 C を

$$C : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}^3; \tau \mapsto \mathbf{s}(\tau) \tag{5.16}$$

のように媒介変数表示して,

$$U(\mathbf{r}) = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbf{F}(\mathbf{s}(\tau)) \cdot \mathbf{s}'(\tau) d\tau \tag{5.17}$$

と計算する. ここで, $\mathbf{s}'(\tau) = (d/d\tau)\mathbf{s}(\tau)$ である. 積分路は運動の経路に選ぶ必要はないので, 媒介変数も時刻 t にとる必要はなく, ここでは τ と書いた. ポテンシャルから力を求めるためには位置で微分すればよいと期待される. そこで, $U(\mathbf{r})$ を位置 x で偏微分してみる.

$$-\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}+h\mathbf{e}_x} \mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+h\mathbf{e}_x} \mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} . \tag{5.18}$$

この積分は ($\mathbf{F}$ が保存力であることから) 経路に依らないので, 積分経路を

$$C : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^3; \tau \mapsto \mathbf{s}(\tau) = \mathbf{r} + \tau\mathbf{e}_x \tag{5.19}$$

のように $\mathbf{r}$ と $\mathbf{r} + h\mathbf{e}_x$ を結ぶ線分を選べば,

$$d\mathbf{s} = \mathbf{s}'(\tau) d\tau = \mathbf{e}_x d\tau \tag{5.20}$$

より,

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F}(\mathbf{r} + \tau\mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{e}_x d\tau = F_x(\mathbf{r} + \tau\mathbf{e}_x) d\tau = [F_x(\mathbf{r}) + \mathcal{O}(\tau)] d\tau \tag{5.21}$$

だから,

$$-\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h (F_x(\mathbf{r}) + \mathcal{O}(\tau)) d\tau = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (F_x(\mathbf{r})h + \mathcal{O}(h^2)) = F_x(\mathbf{r}) \tag{5.22}$$

*22 位置 $\mathbf{r}$ でのポテンシャルを求めるので, 積分変数には $\mathbf{r}$ を避けて $\mathbf{s}$ を用いた.

と計算できる． y 成分と z 成分も全く同様である．以上より，保存力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ は，ポテンシャルエネルギー $U(\mathbf{r})$ から，

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\partial}{\partial x}U(\mathbf{r}), -\frac{\partial}{\partial y}U(\mathbf{r}), -\frac{\partial}{\partial z}U(\mathbf{r}) \right] = - \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] U(\mathbf{r}) \quad (5.23)$$

のように計算できる．ここで，ベクトル型微分演算子 **ナブラ** ∇ を，

$$\nabla = [\partial_x, \partial_y, \partial_z] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right], \quad (5.24)$$

で導入すれば，この関係を簡単に，

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} U(\mathbf{r}), \quad (5.25)$$

と書くことができる．力 $\mathbf{F}$ が保存力であればポテンシャル U が定義できるが，逆に，力 $\mathbf{F}$ が何らかのポテンシャル U から $\mathbf{F} = -\nabla U$ と導かれるときには， $\mathbf{F}$ による仕事が経路に依らないこと，すなわち $\mathbf{F}$ が保存力であることが容易に示される．したがって，力 $\mathbf{F}$ が保存力である必要十分条件は，力 $\mathbf{F}$ を導くポテンシャル $U(\mathbf{r})$ が存在することである．以下の小節では具体的な保存力の例を挙げ，ポテンシャルの計算を行う．

5.2.1 一様重力のポテンシャル

基準点 $\mathbf{r}_0$ から $\mathbf{r}$ までの適当な経路を $C: [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}^3; \tau \mapsto \mathbf{s}(\tau)$ とすると，一様重力 $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ のポテンシャルは，

$$U(\mathbf{r}) = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -m\mathbf{g} \cdot \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbf{s}'(\tau) d\tau = -m\mathbf{g} \cdot [\mathbf{s}(\tau)]_{\tau_1}^{\tau_2} = -m\mathbf{g} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (5.26)$$

と書ける． $\mathbf{s}(\tau_1) = \mathbf{r}_0$ と $\mathbf{s}(\tau_2) = \mathbf{r}$ を用いた．ふつうは基準点を $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ と選んで，

$$U(\mathbf{r}) = -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}. \quad (5.27)$$

同様に，一様な力 $\mathbf{F}_0$ 場合には $U(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{r}$ と書ける．たとえば，一様電場 $\mathbf{E}_0$ 中の点電荷 q のポテンシャルは $U(\mathbf{r}) = -q\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$ である．^{*23}

5.2.2 弾性力のポテンシャル

Hooke の法則を 3 次元の場合に一般化した $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}$ という力のポテンシャルは，

$$U(\mathbf{r}) = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = k \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbf{s}(\tau) \cdot \mathbf{s}'(\tau) d\tau = k \left[\frac{1}{2} s(\tau)^2 \right]_{\tau_1}^{\tau_2} = \frac{1}{2} k (r^2 - r_0^2). \quad (5.28)$$

ふつうは基準点を $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ と選んで，

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} k r^2. \quad (5.29)$$

5.2.3 万有引力のポテンシャル

質量 M の中心天体の位置を原点とした，万有引力 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r^3} \mathbf{r}$ のポテンシャルは，

$$U(\mathbf{r}) = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = GMm \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\mathbf{s}(\tau)}{s(\tau)^3} \cdot \mathbf{s}'(\tau) d\tau = GMm \left[-\frac{1}{s(\tau)} \right]_{\tau_1}^{\tau_2} = -GMm \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (5.30)$$

と計算できる．^{*24} ふつうは基準点を無限遠点 ($r_0 = |\mathbf{r}_0| \rightarrow \infty$) として，

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r}. \quad (5.31)$$

問 8 (i) 一様重力，(ii) 弾性力，(iii) 万有引力のポテンシャルから力を導け．

^{*23} 単位電荷あたりのポテンシャル $V(\mathbf{r}) \equiv U(\mathbf{r})/q$ ($= -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}$) を**電位**と呼ぶ．電位は「静電ポテンシャル」や「スカラーポテンシャル」と呼ばれることもあるが，ポテンシャルエネルギーとは異なるので注意．

^{*24} $\int \frac{\mathbf{s}}{s^3} \cdot \mathbf{s}' d\tau = \frac{1}{2} \int (s^2)^{-3/2} \frac{d}{d\tau}(s^2) d\tau = -(s^2)^{-1/2} = -\frac{1}{s}$ と計算すればよい．

解答 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ より $\partial r / \partial x = x/r$ 等が成り立つことを用いて, $\mathbf{r}$ の各成分での偏微分を順に計算すればよい. ここではベクトル解析の記法を用いて示す.*25 (i) 一様重力のポテンシャル $U(\mathbf{r}) = -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$ に対して,

$$F_i = -\partial_i U = m\partial_i(\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) = mg_j \partial_i r_j = mg_j \delta_{ij} = mg_i = (m\mathbf{g})_i. \quad (5.32)$$

(ii) 弾性力のポテンシャル $U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}kr^2$ に対して,

$$F_i = -\partial_i U = -\frac{1}{2}k \partial_i(r^2) = -kr \partial_i r = -kr \cdot \frac{r_i}{r} = -kr_i = (-k\mathbf{r})_i. \quad (5.33)$$

(iii) 万有引力のポテンシャル $U(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r}$ に対して,

$$F_i = -\partial_i U = GMm \partial_i \left(\frac{1}{r} \right) = -GMm \cdot \frac{\partial_i r}{r^2} = -\frac{GMm}{r^3} r_i = \left(-\frac{GMm}{r^3} \mathbf{r} \right)_i. \quad (5.34)$$

(b)* **保存力の必要十分条件** 任意の始点 $\mathbf{r}_1$ と終点 $\mathbf{r}_2$ をとり, $\mathbf{r}_1$ から $\mathbf{r}_2$ への任意の2つの経路 C_1 と C_2 を考える. 位置のみに依存する力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ が経路 C_1 に沿って行う仕事 W_{C_1} と経路 C_2 に沿って行う仕事 W_{C_2} の差は,

$$W_{C_1} - W_{C_2} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{C_1 - C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (5.35)$$

と書ける. ここで, C_1 に沿って $\mathbf{r}_1$ から $\mathbf{r}_2$ まで行き, C_2 を逆に辿って $\mathbf{r}_2$ から $\mathbf{r}_1$ まで戻ってくる閉じた経路を $(C_1 - C_2)$ と書いた. したがって, 任意の経路 C_1 と C_2 に対して $W_{C_1} = W_{C_2}$ となるための必要十分条件は, 任意の閉路 C に対して,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (5.36)$$

が成り立つことである. しかし, 実際に任意の閉路 C に対してこの条件を確かめるのは大変である. そこで, C を周囲とする任意の曲面を S として Stokes の定理を用いて

$$0 = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \quad (5.37)$$

と書き直すことで, 力 $\mathbf{F}$ が保存力であるための必要十分条件は, 以下のように与えられることが分かる.*26

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (5.38)$$

これは力 $\mathbf{F}$ が与えられれば実際に計算して確かめることができる実用的な条件である. 力 $\mathbf{F}$ が保存力である必要十分条件として, このノートでは以下の3つの条件を挙げた.

- (1) 力 $\mathbf{F}$ がポテンシャル U から $\mathbf{F} = -\nabla U$ と導かれる.
- (2) 任意の経路 C に対して $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$ が成り立つ.
- (3) 任意の点で $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ を満たす.

問 9* (i) 一様重力, (ii) 弾性力, (iii) 万有引力に対して $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ を確かめよ.

解答 (i) 一様重力 $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ は定ベクトルなので自明に $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. (ii)–(iii) ベクトル場 $r^n \mathbf{r}$ の回転は

$$(\nabla \times (r^n \mathbf{r}))_i = \epsilon_{ijk} \partial_j (r^n r_k) = \epsilon_{ijk} \left(nr^{n-1} \cdot \frac{r_j}{r} \cdot r_k + r^n \delta_{jk} \right) = 0 \quad (5.39)$$

より, 弾性力 $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ ($n=0$) と万有引力 $\mathbf{F} = -GMm\mathbf{r}/r^3$ ($n=-3$) のいずれに対しても $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ である.

*25 『ベクトル解析の公式』[PDF] を参照のこと.

*26 数学的に細かいことを言えば, 力 $\mathbf{F}$ の定義域が単連結でない場合には, 定義域の全体で $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ が成り立っていても力 $\mathbf{F}$ が保存力でない(仕事を経路に依る)ことがある. 例えば, 円柱座標 (ρ, ϕ, z) で $\mathbf{F} = (1/\rho)\mathbf{e}_\phi$ と与えられる力は $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ を(定義されていない z 軸上を除いて)満たすが, z 軸をひと周りする経路に沿った仕事は 2π となる.

5.3 力学的エネルギーの変化と仕事の関係・力学的エネルギー保存則

保存力 $\mathbf{F}$ に対してポテンシャル

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} \quad (5.40)$$

を定義すると、 $\mathbf{r}_1$ から $\mathbf{r}_2$ までに保存力 $\mathbf{F}$ がする仕事は、

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = -U(\mathbf{r}_2) + U(\mathbf{r}_1) \quad (5.41)$$

と 2 地点のポテンシャルの差として書ける。質点に保存力のみが働く場合には、運動エネルギーの変化と仕事の関係は

$$K(t_2) - K(t_1) = W = -U(\mathbf{r}_2) + U(\mathbf{r}_1) \quad (5.42)$$

と書ける。これを整理して、**力学的エネルギー保存則**

$$K(t_2) + U(\mathbf{r}_2) = K(t_1) + U(\mathbf{r}_1) \quad (5.43)$$

を得る。質点に保存力以外の力 $\mathbf{F}'$ が働いている場合には、その力による仕事を W'_C と書いて、力学的エネルギーの変化と仕事の関係を得る。

$$(K(t_2) + U(\mathbf{r}_2)) - (K(t_1) + U(\mathbf{r}_1)) = W'_C. \quad (5.44)$$

W'_C には保存力による仕事を含んでいてもよい。

問 10 地表から物体を打ち出したとき、(万有引力のポテンシャルの基準点を無限遠とした) 力学的エネルギーが 0 以上であれば、(太陽など他の天体の影響を無視すれば) 物体は地球の重力を振り切って無限遠方に到達する。物体が無限遠に到達するための速さの最小値 (**第二宇宙速度**) を求めよ。

解答 求める速さを v とすると、条件より、

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0.$$

ここで、 m は物体の質量、 $R = 6400 \text{ km}$ と M はそれぞれ地球の半径と質量である。これを v について解いて、

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 6400 \text{ km}} = 11.2 \text{ km/s}.$$

2 つ目の等号では地表付近での重力加速度が $g = GM/R^2 (= 9.8 \text{ m/s}^2)$ と表されることを用いた。これは第一宇宙速度 $v_1 = \sqrt{gR}$ の $\sqrt{2} \simeq 1.41$ 倍である。

(c) **運動方程式から力学的エネルギー保存則を導く技巧** 1 次元の場合と同様に、保存力 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$ のみが働く場合には、運動方程式 $m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r})$ に速度 $\dot{\mathbf{r}}$ をかける (内積をとる) ことで、力学的エネルギー保存則が得られる。^{*27}

$$0 = m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla U(\mathbf{r}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + U(\mathbf{r}) \right). \quad (5.45)$$

(d) **内部エネルギー** 先に全運動エネルギー K は質量中心の運動エネルギー $\bar{K}$ と相対運動エネルギー K^* の和として与えられることを導いた。

$$K = \bar{K} + K^*. \quad (5.46)$$

系の内力がポテンシャル U から導かれる保存力の場合には、全力学的エネルギーは、

$$E = K + U = \bar{K} + K^* + U. \quad (5.47)$$

と書ける。このとき、 $K^* + U$ は系の**内部エネルギー**と呼ばれる。内部エネルギーは質量中心の静止系から見た系の全力学的エネルギーである。

^{*27} 合成関数の微分公式より、 $\frac{d}{dt}U(\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla U(\mathbf{r})$ と計算できる。

6* Euler-Lagrange 方程式と Noether の定理 — Lagrange 形式の解析力学 —

第 3 章では、Descartes 座標での運動方程式を極座標で書き直すことで、角運動量保存則を見出した。この章では、この議論を発展させ、運動方程式をより一般的な座標で書き直すことを通して、系の保存量を見出す体系的な方法を提示する。Newton 力学を座標系に依らない形で再定式化する分野は**解析力学**と呼ばれている。このノートでは、保存則と関連する解析力学のごく一部の内容のみを扱う。この章では 3 次元空間内のひとつの質点の運動のみを扱うが、複数の質点からなる系への一般化は容易である。解析力学は拘束がある系の運動を記述する際に大きな威力を発揮するのであるが、このノートでは扱わない。

6.1 Euler-Lagrange 方程式 — 一般化座標を用いた運動方程式 —

任意の座標系 q_i ($i = 1, 2, 3$) をとる。この座標系は時刻 t に依存してもよい。質点の位置 $\mathbf{r}$ は、

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3, t) \equiv \mathbf{r}(q, t). \quad (6.1)$$

と表すことができる。表記の簡略化のため (q_1, q_2, q_3) をまとめて q と書いた。 $q = (q_1, q_2, q_3)$ は Descartes 座標や球座標以外にも、一般にどんな座標でもよいという意味で、**一般化座標**または**広義座標**と呼ばれる。 $\mathbf{r}$ の時間微分は、

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \quad (6.2)$$

と計算できる。ここで、 i についての和の記号 $\sum_{i=1}^3$ を省略した (Einstein の縮約記法)。 $\dot{\mathbf{r}}$ は q だけでなく $\dot{q}$ にも依存しているから $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(q, \dot{q}, t)$ と書き、形式的に q_i と $\dot{q}_i$ を独立な量と見なして $\dot{q}_i$ で偏微分することで、^{*28}

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \quad (6.3)$$

が得られる。また、以下の式も成り立つ。

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right). \quad (6.4)$$

ここで、天下り的ではあるが、運動方程式の左辺 $m\ddot{\mathbf{r}}$ と $\partial \mathbf{r} / \partial q_i$ の内積をとって式変形を行うと、^{*29}

$$m\ddot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(m\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) - m\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(m\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{q}_i} \right) - m\dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (6.5)$$

となる。ここで、運動エネルギー

$$T(q, \dot{q}, t) \equiv \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{r}}(q, \dot{q}, t))^2 \quad (6.6)$$

を定義した。^{*30} **一般化力**

$$Q_i \equiv \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \quad (6.7)$$

を定義すると、運動方程式 $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ は、 $\partial \mathbf{r} / \partial q_i$ との内積をとることで、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (6.8)$$

と書き換えることができる。ここでさらに、力 F_i が保存力で、ポテンシャル U を用いて $\mathbf{F} = -\nabla U$ と与えられている場合には、一般化力 Q_i は

$$Q_i = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = -(\nabla U) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial r_j} \frac{\partial r_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (6.9)$$

^{*28} 「 $\dot{q}_i$ は q_i の時間微分であるのに独立な量と見なして計算してよいのか」というのは、解析力学を学ぶ初学者のほとんどが抱く疑問である。実際には以下のように考えている。 $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(q, \dot{q}, t)$ の形を見て、新しい関数 $\dot{\mathbf{r}}(\alpha, \beta, t)$ を定義し、 $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(q, \dot{q}, t)$ を (7 変数の) 関数 $\dot{\mathbf{r}}(\alpha, \beta, t)$ に $\alpha = q$ と $\beta = \dot{q}$ を代入したものと考える。このとき、 $\partial \dot{\mathbf{r}} / \partial \dot{q}_i$ の意味は、 $\partial \dot{\mathbf{r}}(\alpha, \beta, t) / \partial \beta$ の計算結果に $\alpha = q$ と $\beta = \dot{q}$ を代入したものである。この種の疑問は、関数名と従属変数に同じ文字を使う慣習によって生じている。このノートでも $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q, t)$ のような記法を用いているが、本来ならば $\mathbf{r} = \mathbf{R}(q, t)$ のように、関数 $\mathbf{R}$ と従属変数 $\mathbf{r}$ には別の文字を用いるべきである。

^{*29} この天下りな計算の意味を知りたい場合は、「仮想仕事の原理」や「d'Ambert の原理 (ダランベールの原理)」で調べてみるとよい。

^{*30} 本文中では運動エネルギー (kinetic energy) を K で表したが、解析力学では T が用いられることが多いので、ここではその慣習に従った。

と書ける。ポテンシャル U が (一般化) 速度に依存しない場合には $\partial U/\partial \dot{q}_i = 0$ であるから、Lagrange 関数または**ラグランジアン** (Lagrangian) と呼ばれる量 $L(q, \dot{q}, t)$ を

$$L(q, \dot{q}, t) \equiv T(q, \dot{q}, t) - U(q, t) \quad (6.10)$$

で定義すると、運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (6.11)$$

と書き直すことができる。^{*31} この方程式は **Euler–Lagrange 方程式** と呼ばれる。

問 11 ラグランジアンが $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r})$ と与えられるとき、Euler–Lagrange 方程式を導け。

解答

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = m \ddot{\mathbf{r}} + \nabla U(\mathbf{r}), \quad \therefore m \ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r}). \quad (6.12)$$

6.2 Noether の定理 — 連続的対称性と保存則 —

一般化座標 q_i に共役な**一般化運動量**

$$p_i(q, \dot{q}, t) \equiv \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(q, \dot{q}, t) \quad (6.13)$$

を定義すると、Euler–Lagrange 方程式は

$$\frac{d}{dt} p_i(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (6.14)$$

と書き直すことができる。この式は、 $\partial L/\partial q_i = 0$ 、すなわちラグランジアンに一般化座標 q_i が含まれていないとき、 q_i に共役な一般化運動量 p_i が保存するという保存則の存在を示している。ラグランジアンに含まれない座標は**循環座標** (cyclic coordinate) や無視できる座標 (ignorable coordinate) と呼ばれることがある。ラグランジアンに一般化座標 q_i が含まれていないとき、ラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ は $q'_i = q_i + a$ という座標変換の下で不変であり、このとき系には q_i の並進変換に対する (連続的な) 対称性があるという。系 (ラグランジアン) に連続的な対称性がある場合、対応した保存量が存在することは、**Noether の定理**として知られている。また、ラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ 自体の時間微分をとると、

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} = \dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} (p_i \dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t} \quad (6.15)$$

と変形できる。一般化運動量の定義 $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$ と Euler–Lagrange 方程式 $\dot{p}_i = \partial L/\partial q_i$ を用いた。この式は、

$$E(q, \dot{q}, t) \equiv p_i(q, \dot{q}, t) \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) \quad (6.16)$$

を定義すると、

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (6.17)$$

と書き直すことができる。ラグランジアンが $L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t)$ と書かれ、運動エネルギーが一般化速度の 2 次式で $T(q, \dot{q}, t) = f(q, t) \dot{q}_i^2$ と表される通常の場合には、 $E(q, \dot{q}, t)$ は力学的エネルギー $T + U$ となるので、 $E(q, \dot{q}, t)$ はエネルギー関数と呼ばれることがある。したがって、ラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ が時間 t を陽に含まないとき、すなわちラグランジアンが $L(q, \dot{q})$ と書けると、エネルギー関数 $E(q, \dot{q}, t) = E(q, \dot{q})$ が保存するという、力学的エネルギー保存則が得られる。力学的エネルギー保存則は、系 (ラグランジアン) の時間並進対称性 ($t' = t + a$ という変換の下での対称性) と結びついており、これも Noether の定理の一例である。

問 12 2 次元空間内で中心力を受けて運動する質点のラグランジアンは極座標で $L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r)$ と与えられる。この系で角運動量が保存することを示せ。

^{*31} ポテンシャルで書けない力 (非保存力) が働く場合には、対応する一般化力を Q'_i として、 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q'_i$ と書ける。

解答 θ についての Euler-Lagrange 方程式は,

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) \quad (6.18)$$

より, 角運動量 $mr^2 \dot{\theta} = mrv_\theta$ が保存する. r についての Euler-Lagrange 方程式も示しておく,

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} + mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial}{\partial r} U(r), \quad \therefore m\ddot{r} = -\frac{\partial}{\partial r} U(r) - mr\dot{\theta}^2 = F(r) - mr\dot{\theta}^2. \quad (6.19)$$

最後の項 $-mr\dot{\theta}^2$ はいわゆる遠心力である.

問 13 ラグランジアン $L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t) = T(q, \dot{q}, t) = f(q, t)\dot{q}_i^2 - U(q, t)$ に対して, エネルギー関数 $E(q, \dot{q}, t) = p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t)$ を計算せよ.

解答 一般化運動量は $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2f(q, t)\dot{q}_i$ と計算できるから, エネルギー関数 $E(q, \dot{q}, t)$ は,

$$E(q, \dot{q}, t) = p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t) = 2f(q, t)\dot{q}_i^2 - (f(q, t)\dot{q}_i^2 - U(q, t)) = f(q, t)\dot{q}_i^2 + U(q, t) = T(q, \dot{q}, t) + U(q, t). \quad (6.20)$$