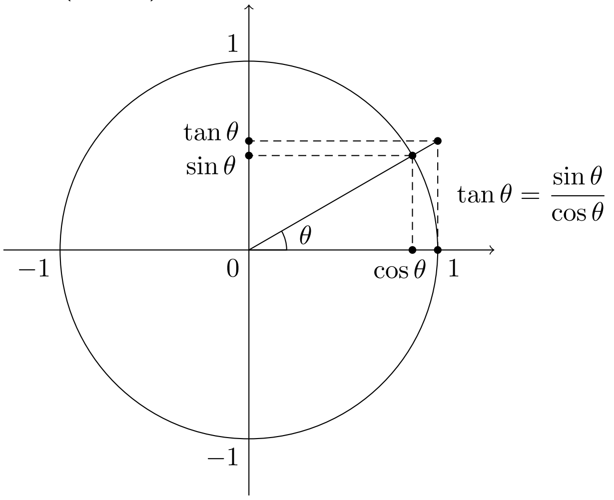
三角関数の公式

以下の I~III (または I, II, III′) は暗記しなくてはならない．**その他の公式は無理に暗記しようとしてはならず，**必要に応じて導出する．よく使う公式は，何度も導出しているうちに自然と覚えてしまう．

三角関数について暗記すべき項目

I. **定義 (単位円)：**



II. **三平方の定理 (ピタゴラスの定理)：**

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \ .$$

III. **加法定理：**

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \ ,$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \ .$$

III′. **Euler の公式：**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \ .$$

Euler の公式から加法定理の導出　$e^{i(\alpha+\beta)}$ を 2 通りに計算する．

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta)} &= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \ , \\ e^{i(\alpha+\beta)} &= e^{i\alpha}e^{i\beta} \\ &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \ . \end{aligned}$$

実部と虚部をそれぞれ比較することで，加法定理が得られる．

三角関数の公式

1. $\cos, \sin, \tan$ の相互関係 (定義または加法定理より)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta\ , \quad \text{etc.}$$

2. $\tan^2\theta$ と $\cos^2\theta$ の関係 (定義と三平方の定理より)

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\ .$$

3. **2 倍角の公式** (加法定理より)

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta\ ,\\ \sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta\ .\end{aligned}$$

4. **半角の公式** (2 倍角の公式より)

$$\begin{aligned}\cos^2\theta &= \frac{1}{2}\Big(1 + \cos(2\theta)\Big)\ ,\\ \sin^2\theta &= \frac{1}{2}\Big(1 - \cos(2\theta)\Big)\ .\end{aligned}$$

5. **積和の公式** (加法定理より)

$$\begin{aligned}\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\Big)\ ,\\ \sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\Big)\ ,\\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\Big)\ ,\\ \cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\Big)\ .\end{aligned}$$

6. **和積の公式** (積和の公式より)

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B &= 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\ ,\\ \cos A - \cos B &= -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\ ,\\ \sin A + \sin B &= 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\ ,\\ \sin A - \sin B &= 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\ .\end{aligned}$$

7. **3 倍角の公式** (加法定理と 2 倍角の公式より)

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\ ,\\ \sin(3\theta) &= -4\sin^3\theta + 3\sin\theta\ .\end{aligned}$$