演習：角運動量の基礎【量子力学】

番号に*印がついた問題はやや難しいかあまり重要ではないので，初めは飛ばしてもよい．この演習問題を通して，角運動量の固有状態の分類について必要な知識を身に付けることができる．軌道角運動量やスピン角運動量，角運動量の合成などは別の演習問題で扱う．

定義　角運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{J}} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$ $(= \hat{\boldsymbol{J}}^\dagger)$ は，以下の交換関係 (角運動量代数) で定義される．

$$\big[\hat{J}_x, \hat{J}_y\big] = i\hbar\hat{J}_z \ , \quad \big[\hat{J}_y, \hat{J}_z\big] = i\hbar\hat{J}_x \ , \quad \big[\hat{J}_z, \hat{J}_x\big] = i\hbar\hat{J}_y \ .$$

角運動量の大きさの 2 乗を $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$ と書く．また，昇降演算子 $\hat{J}_\pm \equiv \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$ $(= \hat{J}_\mp^\dagger)$ を定義する．

1．演算子の計算

以下の式を示せ．

(1.1) $\big[\hat{J}^2, \hat{J}_x\big] = \big[\hat{J}^2, \hat{J}_y\big] = \big[\hat{J}^2, \hat{J}_z\big] = \big[\hat{J}^2, \hat{J}_\pm\big] = 0$.

(1.2) $\big[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm\big] = \pm\hbar\hat{J}_\pm$.

(1.3) $\big[\hat{J}_\pm, \hat{J}_\mp\big] = \pm 2\hbar\hat{J}_z$.

(1.4) $\hat{J}_\pm\hat{J}_\mp = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 \pm \hbar\hat{J}_z$.

(1.5) $\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 = \hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+$.

2．固有状態

$\big[\hat{J}^2, \hat{J}_z\big] = 0$ より，以下の固有方程式を満たす $\hat{J}^2$ と $\hat{J}_z$ の同時固有状態 $|\lambda, \mu\rangle$ をとることができる．

$$\hat{J}^2 |\lambda, \mu\rangle = \lambda\hbar^2 |\lambda, \mu\rangle \ , \quad \hat{J}_z |\lambda, \mu\rangle = \mu\hbar |\lambda, \mu\rangle \ .$$

(2.1) $\hat{J}^2\big(\hat{J}_\pm |\lambda, \mu\rangle\big) = \lambda\hbar^2\big(\hat{J}_\pm |\lambda, \mu\rangle\big)$ と $\hat{J}_z\big(\hat{J}_\pm |\lambda, \mu\rangle\big) = (\mu \pm 1)\hbar\,\big(\hat{J}_\pm |\lambda, \mu\rangle\big)$ を示せ．

(2.2) $\lambda \geq \mu^2$ を示せ．(Hint: $(\lambda - \mu^2)$ を $|\lambda, \mu\rangle$ で挟む)

(2.1) の結果より $|\lambda, \mu\rangle$ に $\hat{J}_\pm$ を繰り返し作用させることで $\hat{J}^2$ の固有値 $\lambda\hbar^2$ を保ったまま $\hat{J}_z$ の固有値を $\pm\hbar$ ずつ次々と上げ下げできるが，(2.2) の結果より μ には制限 $\mu^2 \leq \lambda$ がある．すなわち，$\hat{J}_+ |\lambda, \mu_{\rm max}\rangle = \hat{J}_- |\lambda, \mu_{\rm min}\rangle = 0$ を満たす**最大重み状態** (highest weight state) $|\lambda, \mu_{\rm max}\rangle$ と $|\lambda, \mu_{\rm min}\rangle$ が存在する．定義より $\mu_{\rm max} \geq \mu_{\rm min}$ であることに注意．

(2.3) $\lambda = \mu_{\rm max}(\mu_{\rm max} + 1) = \mu_{\rm min}(\mu_{\rm min} - 1)$ と $\mu_{\rm max} = -\mu_{\rm min}$ を示せ．(Hint: 最大重み状態の条件のノルムを計算)

(2.4) λ は $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots$ として $\lambda = j(j+1)$ と書けることを示せ．

(2.5) $\lambda = j(j+1)$ を固定したとき，μ のとり得る値が $\mu = -j, -j+1, \cdots, j-1, j$ の $(2j+1)$ 個であることを示せ．

以降，$\hat{J}^2$ の固有状態は $\lambda = j(j+1)$ ではなく j で指定し，$\hat{J}^2$ と $\hat{J}_z$ の同時固有状態を $|j, m\rangle$ と書く．$|j, m\rangle$ は規格直交性 $\langle j', m' | j, m\rangle = \delta_{j'j}\delta_{m'm}$ と，以下の固有方程式を満たす．

$$\hat{J}^2 |j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |j, m\rangle \ , \quad \big(j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2, \cdots\big) \ ,$$
$$\hat{J}_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle \ , \quad (m = -j, -j+1, \cdots, j-1, j) \ .$$

(2.6) $\hat{J}_\pm |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}\,\hbar\,|j, m \pm 1\rangle$ を示せ．(Hint: $\hat{J}_\pm |j, m\rangle = c_\pm(j, m)\,|j, m \pm 1\rangle$ のノルムを計算)

*__(2.7)__ $|j, m\rangle$ $(m = -j, \cdots, j)$ で張られる $(2j+1)$ 次元空間が $\hat{\boldsymbol{J}}$ の作用に関して閉じた $\{0\}$ でない最小の部分空間であることを示せ．

*__(2.8)__ $\hat{J}_\pm$ の固有値が 0 のみであり，対応する固有状態は最大重み状態 $|j, \pm j\rangle$ に限られることを示せ．

(2.9) 状態 $|j, m\rangle$ における $\hat{J}_x$ と $\hat{J}_y$ の期待値 $\langle\hat{J}_x\rangle = \langle\hat{J}_y\rangle = 0$ と分散 $\sigma(\hat{J}_x)^2 = \sigma(\hat{J}_y)^2 = \dfrac{j(j+1) - m^2}{2}\hbar^2$ を導出せよ．

*__(2.10)__ 状態 $|j, m\rangle$ において $\hat{J}_x$ と $\hat{J}_y$ の間に Robertson の不等式 (不確定性関係) $\sigma(\hat{J}_x)\sigma(\hat{J}_y) \geq \dfrac{1}{2}|\langle[\hat{J}_x, \hat{J}_y]\rangle|$ が成り立つことを確かめよ．

演習：角運動量の基礎【量子力学】解答例

注意　解答例では交換関係の線形性や以下の公式は断りなく用いる．

$$[\hat{A}\hat{B},\hat{C}]=\hat{A}[\hat{B},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{C}]\hat{B}\ ,\quad [\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=\hat{B}[\hat{A},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}\ .$$

1．演算子の計算

(1.1)
$$\begin{aligned}[\hat{J}^2,\hat{J}_z]&=[\hat{J}_x^2+\hat{J}_y^2+\hat{J}_z^2,\hat{J}_z]=[\hat{J}_x^2,\hat{J}_z]+[\hat{J}_y^2,\hat{J}_z]+[\hat{J}_z^2,\hat{J}_z]\\&=\hat{J}_x[\hat{J}_x,\hat{J}_z]+[\hat{J}_x,\hat{J}_z]\hat{J}_x+\hat{J}_y[\hat{J}_y,\hat{J}_z]+[\hat{J}_y,\hat{J}_z]\hat{J}_y+\hat{J}_z[\hat{J}_z,\hat{J}_z]+[\hat{J}_z,\hat{J}_z]\hat{J}_z\\&=\hat{J}_x(-i\hbar\hat{J}_y)+(-i\hbar\hat{J}_y)\hat{J}_x+(i\hbar\hat{J}_y)\hat{J}_x+\hat{J}_x(i\hbar\hat{J}_y)+0+0\\&=0\ .\end{aligned}$$

同様に $[\hat{J}^2,\hat{J}_x]=[\hat{J}^2,\hat{J}_y]=0$．また，$[\hat{J}^2,\hat{J}_\pm]=[\hat{J}^2,\hat{J}_x\pm i\hat{J}_y]=[\hat{J}^2,\hat{J}_x]\pm i[\hat{J}^2,\hat{J}_y]=0$.

補足　$\hat{\boldsymbol{J}}=(\hat{J}_1,\hat{J}_2,\hat{J}_3)$ とし，完全反対称記号 ϵ_{ijk} と Einstein の縮約記法を用いると，角運動量代数は

$$[\hat{J}_i,\hat{J}_j]=i\hbar\,\epsilon_{ijk}\hat{J}_k$$

と書くことができる.[1] これを用いると，

$$[\hat{J}^2,\hat{J}_i]=[\hat{J}_j\hat{J}_j,\hat{J}_i]=\hat{J}_j[\hat{J}_j,\hat{J}_i]+[\hat{J}_j\hat{J}_i,\hat{J}]_j=\hat{J}_j(i\hbar\,\epsilon_{jik}\hat{J}_k)+(i\hbar\,\epsilon_{jik}\hat{J}_k)\hat{J}_j=i\hbar\,\epsilon_{jik}(\hat{J}_j\hat{J}_k+\hat{J}_k\hat{J}_j)=0$$

と計算できる．最後の等号では，ϵ_{jik} が添字 j と k について反対称，$(\hat{J}_j\hat{J}_k+\hat{J}_k\hat{J}_j)$ が対称であることを用いた.

(1.2)　$[\hat{J}_z,\hat{J}_\pm]=[\hat{J}_z,\hat{J}_x\pm i\hat{J}_y]=[\hat{J}_z,\hat{J}_x]\pm i[\hat{J}_z,\hat{J}_y]=i\hbar\hat{J}_y\pm i(-i\hbar\hat{J}_x)=i\hbar\hat{J}_y\pm\hbar\hat{J}_x=\pm\hbar(\hat{J}_x\pm i\hat{J}_y)=\pm\hbar\hat{J}_\pm\ .$

(1.3)　$[\hat{J}_\pm,\hat{J}_\mp]=[\hat{J}_x\pm i\hat{J}_y,\hat{J}_x\mp i\hat{J}_y]=\mp i[\hat{J}_x,\hat{J}_y]\pm i[\hat{J}_y,\hat{J}_x]=\mp i(i\hbar\hat{J}_z)\pm i(-i\hbar\hat{J}_z)=\pm 2\hbar\hat{J}_z\ .$

(1.4)　$\hat{J}_\pm\hat{J}_\mp=(\hat{J}_x\pm i\hat{J}_y)(\hat{J}_x\mp i\hat{J}_y)=\hat{J}_x^2+\hat{J}_y^2\mp i[\hat{J}_x,\hat{J}_y]=(\hat{J}_x^2+\hat{J}_y^2+\hat{J}_z^2)-\hat{J}_z^2\mp i(i\hbar\hat{J}_z)=\hat{J}^2-\hat{J}_z^2\pm\hbar\hat{J}_z\ .$

(1.5)　$\hat{J}_+\hat{J}_-=\hat{J}^2-\hat{J}_z^2+\hbar\hat{J}_z$ と $\hat{J}_-\hat{J}_+=\hat{J}^2-\hat{J}_z^2-\hbar\hat{J}_z$ の辺々を加えればよい.

2．固有状態

(2.1)　$[\hat{J}^2,\hat{J}_\pm]=0$ より $\hat{J}^2\hat{J}_\pm=\hat{J}_\pm\hat{J}^2$ であるから，

$$\hat{J}^2\big(\hat{J}_\pm|\lambda,\mu\rangle\big)=\hat{J}^2\hat{J}_\pm|\lambda,\mu\rangle=\hat{J}_\pm\hat{J}^2|\lambda,\mu\rangle=\hat{J}_\pm(\lambda\hbar^2)|\lambda,\mu\rangle=\lambda\hbar^2\big(\hat{J}_\pm|\lambda,\mu\rangle\big)\ .$$

また，$[\hat{J}_z,\hat{J}_\pm]=\pm\hbar\hat{J}_\pm$ より $\hat{J}_z\hat{J}_\pm=\hat{J}_\pm\hat{J}_z\pm\hbar\hat{J}_\pm$ であるから，

$$\hat{J}_z\big(\hat{J}_\pm|\lambda,\mu\rangle\big)=(\hat{J}_z\hat{J}_\pm)|\lambda,\mu\rangle=(\hat{J}_\pm\hat{J}_z\pm\hbar\hat{J}_\pm)|\lambda,\mu\rangle=\big(\hat{J}_\pm(\mu\hbar)\pm\hbar\hat{J}_\pm\big)|\lambda,\mu\rangle=(\mu\pm1)\hbar\big(\hat{J}_\pm|\lambda,\mu\rangle\big)\ .$$

(2.2)　$(\lambda-\mu^2)\hbar^2$ を $|\lambda,\mu\rangle$ で挟むことで，

$$\begin{aligned}(\lambda-\mu^2)\hbar^2&=\langle\lambda,\mu|\big(\lambda\hbar^2-(\mu\hbar)^2\big)|\lambda,\mu\rangle=\langle\lambda,\mu|(\hat{J}^2-\hat{J}_z^2)|\lambda,\mu\rangle=\langle\lambda,\mu|(\hat{J}_x^2+\hat{J}_y^2)|\lambda,\mu\rangle\\&=\langle\lambda,\mu|(\hat{J}_x^\dagger\hat{J}_x+\hat{J}_y^\dagger\hat{J}_y)|\lambda,\mu\rangle=\big\|\hat{J}_x|\lambda,\mu\rangle\big\|+\big\|\hat{J}_y|\lambda,\mu\rangle\big\|\geq0\ .\end{aligned}$$

補足　$\hat{J}^2-\hat{J}_z^2=\hat{J}_+\hat{J}_-+\hat{J}_-\hat{J}_+=\hat{J}_-^\dagger\hat{J}_-+\hat{J}_+^\dagger\hat{J}_+$ を用いてもよい.

---

[1]完全反対称記号 ϵ_{ijk} は (i,j,k) が $(1,2,3)$ の偶置換の場合 1，奇置換の場合 -1，その他の場合 0 をとる．また，Einstein の縮約記法を用いると，$[\hat{J}_i,\hat{J}_j]=i\hbar\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\hat{J}_k$ の和の記号を省略できる．完全反対称記号や Einstein の縮約記法の詳細についてはこのノートを参照.

(2.3) $\hat{J}_+ |\lambda, \mu_{\max}\rangle = 0$ のノルムを計算すると，

$$\begin{aligned} 0 &= \left\| \hat{J}_+ |\lambda, \mu_{\max}\rangle \right\|^2 = \langle \lambda, \mu_{\max}| \hat{J}_- \hat{J}_+ |\lambda, \mu_{\max}\rangle = \langle \lambda, \mu_{\max}| (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z) |\lambda, \mu_{\max}\rangle \\ &= \langle \lambda, \mu_{\max}| \big(\lambda\hbar^2 - (\mu_{\max}\hbar)^2 - \mu_{\max}\hbar\big) |\lambda, \mu_{\max}\rangle = \big(\lambda - \mu_{\max}(\mu_{\max}+1)\big)\hbar^2 \end{aligned}$$

となり，$\lambda = \mu_{\max}(\mu_{\max}+1)$ を得る．同様に，$\hat{J}_- |\lambda, \mu_{\min}\rangle = 0$ のノルムを計算すると，

$$\begin{aligned} 0 &= \left\| \hat{J}_- |\lambda, \mu_{\min}\rangle \right\|^2 = \langle \lambda, \mu_{\min}| \hat{J}_+ \hat{J}_- |\lambda, \mu_{\min}\rangle = \langle \lambda, \mu_{\min}| (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar \hat{J}_z) |\lambda, \mu_{\min}\rangle \\ &= \langle \lambda, \mu_{\min}| \big(\lambda\hbar^2 - (\mu_{\min}\hbar)^2 + \mu_{\min}\hbar\big) |\lambda, \mu_{\min}\rangle = \big(\lambda - \mu_{\min}(\mu_{\min}-1)\big)\hbar^2 \end{aligned}$$

となり，$\lambda = \mu_{\min}(\mu_{\min}-1)$ を得る．ここで，$\lambda = \mu_{\max}(\mu_{\max}+1) = \mu_{\min}(\mu_{\min}-1)$ より，

$$0 = \mu_{\max}(\mu_{\max}+1) - \mu_{\min}(\mu_{\min}-1) = (\mu_{\max}+\mu_{\min})(\mu_{\max}-\mu_{\min}+1)$$

となるが，$\mu_{\max} - \mu_{\min} + 1 \geq 1$ であるから，$\mu_{\max} + \mu_{\min} = 0$，すなわち $\mu_{\max} = -\mu_{\min}$ である．

(2.4) $|\lambda, \mu_{\min}\rangle$ に $\hat{J}_+$ を $(N+1)$ 回作用させて初めて $(\hat{J}_+)^{N+1} |\lambda, \mu_{\min}\rangle = 0$ となったとすると，$(\hat{J}_+)^N |\lambda, \mu_{\min}\rangle \propto |\lambda, \mu_{\min}+N\rangle \propto |\lambda, \mu_{\max}\rangle$ であるから，[2] $\mu_{\min} + N = \mu_{\max}$ を得る．N は非負整数である．(2.3) の結果 $\mu_{\max} = -\mu_{\min}$ と合わせて，$\mu_{\max} = -\mu_{\min} = N/2$ が得られる．したがって，$j = N/2$ とおけば，λ は以下のように書ける．

$$\lambda = \mu_{\max}(\mu_{\max}+1) = j(j+1)\ , \quad \left(j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2, \cdots\right)\ .$$

(2.5) $\lambda = j(j+1)$ に対して，μ は $\mu_{\min} = -j$ から $\mu_{\max} = j$ まで 1 刻みの値をとるから，μ のとり得る値の数は $(\mu_{\max} - \mu_{\min}) + 1 = 2j+1$ 個である．

(2.6) 比例定数を $c_\pm(j,m)$ (>0) として，$\hat{J}_\pm |j,m\rangle = c_\pm(j,m) |j, m\pm 1\rangle$ と書く．両辺のノルムを計算すると，

$$\langle j,m| \hat{J}_\mp \hat{J}_\pm |j,m\rangle = c_\pm(j,m)^2 \langle j, m\pm 1 | j, m\pm 1\rangle\ .$$

ここで，$\langle j, m\pm 1 | j, m\pm 1\rangle = 1$ であるから，

$$\begin{aligned} c_\pm(j,m)^2 &= \langle j,m| \hat{J}_\mp \hat{J}_\pm |j,m\rangle = \langle j,m| (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 \mp \hbar \hat{J}_z) |j,m\rangle \\ &= \langle j,m| \big(j(j+1)\hbar^2 - (m\hbar)^2 \mp \hbar(m\hbar)\big) |j,m\rangle = \big(j(j+1) - m(m\pm 1)\big)\,\hbar^2\ . \end{aligned}$$

したがって，$c_\pm(j,m) = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,\hbar$ であり，[3] $\hat{J}_\pm |j,m\rangle$ は以下のように書ける．

$$\hat{J}_\pm |j,m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,\hbar\, |j, m\pm 1\rangle\ .$$

(2.7) $|j,m\rangle$ $(m = -j, \cdots, j)$ が張る $(2j+1)$ 次元ベクトル空間 V の $\{0\}$ でない部分空間 W が $\hat{\boldsymbol{J}}$ の作用に関して閉じているとする．W の元 $|\psi\rangle$ $(\neq 0)$ に適当な回数だけ $\hat{J}_+$ を作用させると $|j,j\rangle$ に比例した状態をつくることができるから，[4] $|j,j\rangle \in W$ である．任意の $|j,m\rangle$ (に比例した状態) は $|j,j\rangle$ に $\hat{J}_-$ を $(j-m)$ 回作用させてつくることができるから，$|j,m\rangle \in W$ である．よって $W = V$ であり，これが条件を満たす最小の部分空間である．

(2.8) $\hat{J}_+$ についてのみ議論する．角運動量の大きさ j の異なる状態は異なる部分空間に属するので，任意の j をひとつ固定して議論してよい．角運動量の大きさ j を持つ任意の状態 $|j,\psi\rangle$ は，$(2j+1)$ 個の状態 $|j,m\rangle$ $(m = -j, -j+1, \cdots, j-1, j)$ を正規直交基底として展開できる．状態 $|j,m\rangle$ に $\hat{J}_+$ を高々$(2j+1)$ 回作用させると $(\hat{J}_+)^{2j+1} |j,m\rangle = 0$ となるから，任意の状態 $|j,m\rangle$ に対しても $(\hat{J}_+)^{2j+1} |j,\psi\rangle = 0$ となる．$\hat{J}_+$ の固有値を λ，対応する固有状態を $|j,\psi_+\rangle$ $(\neq 0)$ とすると，$\hat{J}_+ |j,\psi_+\rangle = \lambda |j,\psi_+\rangle$ が成り立つ．この両辺に $\hat{J}_+$ を $2j$ 回作用させることで，$0 = \lambda^{2j+1} |j,\psi_+\rangle$ となるが，

[2] 最大重み状態に縮退がある場合は考えていない．

[3] $c_\pm(j,m) = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,\hbar = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,\hbar$ とも書ける．

[4] $|\psi\rangle = \sum_{m=-j}^{j} a_m |j,m\rangle$ と展開すると，$a_n \neq 0$ となる最小の n に対して $\hat{J}_+$ を $(j-n)$ 回作用させた状態 $(\hat{J}_+)^{j-n} |\psi\rangle$ は $|j,j\rangle$ に比例する．

$|j,\psi_+\rangle \neq 0$ なので，$\lambda^{2j+1}=0$，すなわち $\lambda=0$ を得る．したがって，対応する固有ベクトルは $\hat{J}_+|j,\psi_+\rangle=0$ を満たすが，$|j,\psi_+\rangle=\displaystyle\sum_{m=-j}^{j}a_m|j,m\rangle$ と展開すると，

$$\hat{J}_+|j,\psi_+\rangle=\sum_{m=-j}^{j}a_m\hat{J}_+|j,m\rangle=\sum_{m=-j}^{j-1}a_mc_+(j,m)|j,m+1\rangle=\sum_{m=-j+1}^{j}a_{m-1}c_+(j,m-1)|j,m\rangle\ .$$

これに左から $\langle j,m|\ (m=-j+1,-j+2,\cdots,j)$ をかけると $a_m=0\ (m=-j+1,-j+2,\cdots,j)$ が得られ，a_j のみ 0 でない値をとり得る．したがって，$\hat{J}_+$ の固有状態は最大重み状態 $|j,j\rangle$ に限られる．

(2.9)　$\hat{J}_\pm=\hat{J}_x\pm i\hat{J}_y$ より $\hat{J}_x=(\hat{J}_++\hat{J}_-)/2, \hat{J}_y=(\hat{J}_+-\hat{J}_-)/2i$ と書ける．$\langle j,m|\hat{J}_\pm|j,m\rangle\propto\langle j,m|j,m\pm1\rangle=0$ を用いると，状態 $|j,m\rangle$ における $\hat{J}_x$ と $\hat{J}_y$ の期待値は，

$$\langle\hat{J}_x\rangle=\langle j,m|\hat{J}_x|j,m\rangle=\frac{1}{2}\langle j,m|(\hat{J}_++\hat{J}_-)|j,m\rangle=\frac{1}{2}\langle j,m|\hat{J}_+|j,m\rangle+\frac{1}{2}\langle j,m|\hat{J}_-|j,m\rangle=0\ ,$$
$$\langle\hat{J}_y\rangle=\langle j,m|\hat{J}_y|j,m\rangle=\frac{1}{2i}\langle j,m|(\hat{J}_+-\hat{J}_-)|j,m\rangle=\frac{1}{2i}\langle j,m|\hat{J}_+|j,m\rangle-\frac{1}{2i}\langle j,m|\hat{J}_-|j,m\rangle=0\ .$$

また，

$$\hat{J}_x^2=\frac{1}{4}(\hat{J}_++\hat{J}_-)^2=\frac{1}{4}(\hat{J}_+^2+\hat{J}_-^2+\hat{J}_+\hat{J}_-+\hat{J}_+\hat{J}_-)\ ,$$
$$\hat{J}_y^2=-\frac{1}{4}(\hat{J}_+-\hat{J}_-)^2=\frac{1}{4}(-\hat{J}_+^2-\hat{J}_-^2+\hat{J}_+\hat{J}_-+\hat{J}_+\hat{J}_-)\ ,$$

と書けるから，$\langle j,m|\hat{J}_\pm^2|j,m\rangle\propto\langle j,m|j,m\pm2\rangle=0$ を用いると，

$$\langle\hat{J}_x^2\rangle=\langle\hat{J}_y^2\rangle=\frac{1}{4}\langle j,m|(\hat{J}_+\hat{J}_-+\hat{J}_-\hat{J}_+)|j,m\rangle=\frac{1}{2}\langle j,m|(\hat{J}^2-\hat{J}_z^2)|j,m\rangle=\frac{j(j+1)-m^2}{2}\hbar^2\ .$$

平均値は $\langle\hat{J}_x\rangle=\langle\hat{J}_y\rangle=0$ であるから，分散 $\sigma(\hat{J}_x)^2\equiv\langle\hat{J}_x^2\rangle-\langle\hat{J}_x\rangle^2=\langle\hat{J}_x^2\rangle$ は 2 乗平均そのものであり，

$$\sigma(\hat{J}_x)^2=\sigma(\hat{J}_y)^2=\frac{j(j+1)-m^2}{2}\hbar^2\ .$$

補足　$j(j+1)>m^2$ より $\sigma(\hat{J}_x)^2=\sigma(\hat{J}_y)^2>0$ である．これは，$\hat{J}_z$ の固有状態 (角運動量の z 成分 J_z が確定した状態) では，x 成分 J_x や y 成分 J_y の測定値は確定した値をとらず測定の度にばらつくことを意味しており，$\hat{J}_z$ と $\hat{J}_x$ あるいは $\hat{J}_z$ と $\hat{J}_y$ の間の不確定性関係と呼ばれている．同様の議論で $\hat{J}_x$ と $\hat{J}_y$ の不確定性関係も言えるので，$\hat{J}_x,\hat{J}_y,\hat{J}_z$ のどの組に対しても，同時に値が確定した状態をとることができない．

(2.10)　(2.7) の結果から，

$$\sigma(\hat{J}_x)\sigma(\hat{J}_y)=\frac{j(j+1)-m^2}{2}\hbar^2\ .$$

一方で，

$$\frac{1}{2}|\langle[\hat{J}_x,\hat{J}_y]\rangle|=\frac{1}{2}|\langle j,m|i\hbar\hat{J}_z|j,m\rangle|=\frac{1}{2}|\langle j,m|i\hbar(m\hbar)|j,m\rangle|=\frac{|m|}{2}\hbar^2\ .$$

したがって，

$$\sigma(\hat{J}_x)\sigma(\hat{J}_y)-\frac{1}{2}|\langle[\hat{J}_x,\hat{J}_y]\rangle|=\frac{j(j+1)-m^2}{2}\hbar^2-\frac{|m|}{2}\hbar^2=\frac{j(j+1)-|m|(|m|+1)}{2}\hbar^2\geq0$$

より，Robertson の不等式が成り立つ．最後の等号は，$j\geq|m|$ より $j(j+1)\geq|m|(|m|+1)$ であることを用いた．