

演習：Gauss の法則【電磁気学】

この演習問題では、「球」と「円柱」は内部を含んだ 3 次元の領域を、「球面」(球の表面)と「円筒」(円柱の側面)は内部を含まない 2 次元領域を表すものとする。

以下の電荷分布がつくる電場を Gauss の法則 (積分形) を用いて求めよ。また、基準点を適当に選んで電位を求めよ。

1. 球対称分布

- (1.1) 点電荷 Q .
- (1.2) 半径 a の球面に一様に分布した電荷 Q .
- (1.3) 半径 a の球に一様に分布した電荷 Q .
- (1.4) 中心を共有する半径 a と b ($> a$) の球面のそれぞれに一様に分布した電荷 Q と $-Q$.
- (1.5) 中心を共有する半径 a と b ($> a$) の球面に挟まれた領域に一様に分布した電荷 Q .
- (1.6) ある点からの距離 r を用いて電荷密度が $\rho_e(r)$ と表される一般的な球対称電荷分布.

2. 直線状分布

- (2.1) 無限に長い直線に線密度 λ_e で一様に分布した電荷.
- (2.2) 半径 a の無限に長い円筒に線密度 λ_e で一様に分布した電荷.
- (2.3) 半径 a の無限に長い円柱に線密度 λ_e で一様に分布した電荷.
- (2.4) 中心軸を共有する半径 a と b ($> a$) の無限に長い円筒のそれぞれに線密度 λ_e と $-\lambda_e$ で一様に分布した電荷.
- (2.5) 中心軸を共有する半径 a と b ($> a$) の無限に長い円筒に挟まれた領域に線密度 λ_e で一様に分布した電荷.
- (2.6) ある直線からの距離 ρ を用いて電荷密度が $\lambda_e(\rho)$ と表される一般的な直線状電荷分布.

3. 平面状分布

- (3.1) 無限に広い平面に面密度 σ_e で分布した電荷.
- (3.2) 無限に広い厚さ d の平板上に面密度 σ_e で分布した電荷.
- (3.3) 間隔 d だけ離れた 2 枚の無限に広い平面にそれぞれ面密度 $\pm\sigma_e$ で分布した電荷.

演習：Gauss の法則【電磁気学】解答例

1. 球対称分布

解答のテンプレート

電荷分布の中心を原点とした球座標 (r, θ, φ) をとると、電荷分布の対称性から電場は $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{e}_r$ と書ける。原点中心の半径 r の球 V に Gauss の法則を適用する。

$$\oint_{S=\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_V \quad (Q_V \text{ は } V \text{ 内部の総電荷})$$

球面 $S = \partial V$ の面素ベクトルは $d\mathbf{S} = \mathbf{e}_r dS$ より S 上で $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(r)dS$ となるので、左辺は

$$\oint_{S=\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(r) \oint_{S=\partial V} dS = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

と計算できる。また、 $Q_V = \boxed{\text{球の半径 } r \text{ に応じて評価}}$ であるから、電場は、

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q_V, \quad \therefore E(r) = \frac{Q_V}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \boxed{Q_V \text{ に応じて評価}}.$$

電位は r のみに依存し、無限遠を基準としたときの電位 $\phi(r)$ は、

$$\phi(r) = - \int_{\infty}^r E(s) ds = \boxed{E(r) \text{ の具体形で計算}}.$$

(1.1)	Q_V	$E(r)$	$\phi(r)$
	Q	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$
(1.2)	Q_V	$E(r)$	$\phi(r)$
$r < a$	0	0	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$
$a < r$	Q	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

(1.3)	Q_V	$E(r)$	$\phi(r)$
$r < a$	$Q \left(\frac{r}{a}\right)^3$	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r}{a^3}$	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2a^2}\right)$
$a \leq r$	Q	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$
(1.4)	Q_V	$E(r)$	$\phi(r)$
$r < a$	0	0	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$
$a < r < b$	Q	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)$
$b < r$	0	0	0

(1.5)	Q_V	$E(r)$	$\phi(r)$
$r < a$	0	0	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot \frac{3b(a+b)}{2(a^2+ab+b^2)}$
$a \leq r < b$	$Q \left(\frac{r^3-a^3}{b^3-a^3}\right)$	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r^3-a^3}{(b^3-a^3)r^2}$	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \cdot \frac{b}{b^3-a^3} \left(\frac{3b^2}{2} - \frac{r^2}{2} - \frac{a^3}{r}\right)$
$b \leq r$	Q	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

(1.6)

$$Q_V = \int_V dV' \rho_e(r') = \int_0^r dr' 4\pi(r')^2 \rho_e(r') = 4\pi \int_0^r dr' (r')^2 \rho_e(r'),$$

$$E(r) = \frac{Q_V}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r dr' (r')^2 \rho_e(r'),$$

$$\phi(r) = - \int_{\infty}^r E(s) ds = \int_r^{\infty} E(s) ds = \frac{1}{\epsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{ds}{s^2} \int_0^s dr' (r')^2 \rho_e(r').$$

2. 直線状分布

解答のテンプレート

電荷分布の中心軸を z 軸とした円柱座標 (ρ, φ, z) をとると、電荷分布の対称性から電場は $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(\rho)\mathbf{e}_\rho$ と書ける． z 軸を中心軸とした半径 ρ 、高さ h の円柱 V に Gauss の法則を適用する．

$$\oint_{S=\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_V . \quad (Q_V \text{ は } V \text{ 内部の総電荷})$$

円柱表面 $S = \partial V$ は、側面 S_0 と底面 $S_\pm$ (上面 S_+ と下面 S_-) からなる．側面 S_0 上では $d\mathbf{S} = \mathbf{e}_\rho dS$ より $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(\rho)dS$ 、底面 $S_\pm$ 上では $d\mathbf{S} = \pm \mathbf{e}_z dS$ より $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$ なので、左辺は

$$\oint_{S=\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_\pm} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(\rho) \int_{S_0} dS + 0 = E(\rho) \cdot 2\pi\rho h$$

と計算できる．また、 $Q_V =$ 円柱の半径 ρ に応じて評価 であるから、電場は、

$$E(\rho) \cdot 2\pi\rho h = \frac{1}{\epsilon_0} Q_V , \quad \therefore E(\rho) = \frac{Q_V}{2\pi\epsilon_0\rho h} = \text{} Q_V \text{ に応じて評価 } \text{} .$$

電位は中心軸からの距離 ρ のみに依存し、軸からの距離 ρ_0 の適当な点を基準としたときの電位 $\phi(\rho)$ は、

$$\phi(\rho) = - \int_{\rho_0}^{\rho} E(s) ds = \text{} E(\rho) \text{ の具体形で計算 } \text{} .$$

(2.1)	Q_V	$E(\rho)$	$\phi(\rho)$
	$\lambda_e h$	$\frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0\rho}$	$-\frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$

(2.2)	Q_V	$E(\rho)$	$\phi(\rho)$
$\rho < a$	0	0	0
$a < \rho$	$\lambda_e h$	$\frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho}$	$-\frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{a}\right)$

- (2.1) では $\phi(\rho_0) = 0$ とした．
- (2.2)–(2.5) では $\phi(a) = 0$ とした．

(2.3)	Q_V	$E(\rho)$	$\phi(\rho)$
$\rho < a$	$\lambda_e h \left(\frac{\rho}{a}\right)^2$	$\frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho}{a^2}$	$\frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a^2 - \rho^2}{2a^2}$
$a \leq \rho$	$\lambda_e h$	$\frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho}$	$-\frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{a}\right)$

(2.4)	Q_V	$E(\rho)$	$\phi(\rho)$
$\rho < a$	0	0	$\frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
$a < \rho < b$	$\lambda_e h$	$\frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0\rho}$	$\frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{\rho}\right)$
$a < \rho$	0	0	0

(2.5)	Q_V	$E(\rho)$	$\phi(\rho)$
$\rho < a$	0	0	$-\frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{a^2}{b^2 - a^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{1}{2} \right]$
$a \leq \rho < b$	$\lambda_e h \left(\frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right)$	$\frac{\lambda_e}{2\pi} \left(\frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2} \right)$	$-\frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{a^2}{b^2 - a^2} \ln\left(\frac{b}{\rho}\right) - \frac{b^2 - \rho^2}{2(b^2 - a^2)} \right]$
$b \leq \rho$	$\lambda_e h$	$\frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0\rho}$	$-\frac{\lambda_e}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{b}\right)$

(2.6)

$$\begin{aligned} Q_V &= \int_V dV' \rho_e(r') = \int_0^\rho d\rho' 2\pi\rho' h \lambda_e(\rho') = 2\pi h \int_0^\rho d\rho' \rho' \lambda_e(\rho') , \\ E(\rho) &= \frac{Q_V}{2\pi\epsilon_0\rho h} = \frac{1}{\epsilon_0\rho} \int_0^\rho d\rho' \rho' \lambda_e(\rho') , \\ \phi(\rho) &= - \int_{\rho_0}^\rho E(s) ds = - \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\rho_0}^\rho \frac{ds}{s} \int_0^s d\rho' \rho' \lambda_e(\rho') . \end{aligned}$$

3. 平面状分布

(3.1) 平面に垂直に z 軸をとり、平面を $z = 0$ とする。電荷分布の対称性から、電場は $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(z)\mathbf{e}_z$ と書くことができ、 $E(-z) = -E(z)$ が成り立つ。平面から等距離 $z (> 0)$ の位置に底面積 A の底面を持つ柱体 V に Gauss の法則を適用する。

$$\oint_{S=\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_V . \quad (Q_V \text{ は } V \text{ 内部の総電荷})$$

柱体表面 $S = \partial V$ は、上面 S_+ 、下面 S_- 、側面 S_0 からなる。上下面 $S_{\pm}$ 上では $d\mathbf{S} = \pm \mathbf{e}_z dS$ より $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \pm E(\pm z) dS = E(z) dS$ 、側面 S_0 上では $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$ であるから、

$$\oint_{S=\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_-} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(z) \int_{S_+} dS + 0 = E(z) \cdot 2A$$

と計算できる。また、 $Q_V = \sigma_e A$ であるから、電場は、

$$E(z) \cdot 2A = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \sigma_e A , \quad E(z) = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0} .$$

$z < 0$ の場合も含めると、

$$E(z) = \begin{cases} \sigma_e/2\epsilon_0 & (z > 0) \\ -\sigma_e/2\epsilon_0 & (z < 0) \end{cases} = \text{sgn}(z) \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0}$$

と書ける。¹ $z = 0$ を基準とした電位 $\phi(z)$ は、

$$\phi(z) = - \int_0^z E(s) ds = - \frac{\sigma_e |z|}{2\epsilon_0} .$$

(3.2) 平板に垂直に z 軸をとり、平板の両底面を $z = \pm d/2$ とする。電荷分布の対称性から、電場は $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(z)\mathbf{e}_z$ と書くことができ、 $E(-z) = -E(z)$ が成り立つ。あとは前問と同様に考えればよい。

	Q_V	$E(z)$	$\phi(z)$
$ z \leq \frac{d}{2}$	$\sigma_e A \cdot \frac{2 z }{d}$	$\frac{\sigma_e z}{\epsilon_0 d}$	$-\frac{\sigma_e z^2}{2\epsilon_0 d}$
$ z > \frac{d}{2}$	$\sigma_e A$	$\text{sgn}(z) \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0}$	$-\frac{\sigma_e (4 z - d)}{8\epsilon_0}$

(3.3) 平面に垂直に z 軸をとり、 $\pm\sigma_e$ に帯電した 2 枚の平面の位置を $z = \pm d/2$ とする。それぞれの平面の電荷密度 $\pm\sigma_e$ がつくる電場は、(3.1) より、

$$E_+(z) = \begin{cases} \sigma_e/2\epsilon_0 & (d/2 < z) \\ -\sigma_e/2\epsilon_0 & (z < d/2) \end{cases} , \quad E_-(z) = \begin{cases} -\sigma_e/2\epsilon_0 & (-d/2 < z) \\ \sigma_e/2\epsilon_0 & (z < -d/2) \end{cases}$$

であるから、求める電場は、

$$E(z) = E_+(z) + E_-(z) = \begin{cases} 0 & (d/2 < z) \\ -\sigma_e/\epsilon_0 & (-d/2 < z < d/2) \\ 0 & (z < -d/2) \end{cases} .$$

$z = 0$ を基準とした電位 $\phi(z)$ は、

$$\phi(z) = - \int_0^z E(s) ds = \begin{cases} -\sigma_e d/4\epsilon_0 & (d/2 < z) \\ -\sigma_e z/2\epsilon_0 & (-d/2 < z < d/2) \\ \sigma_e d/4\epsilon_0 & (z < -d/2) \end{cases} .$$

¹ $\text{sgn}(z) = z/|z|$ は z の符号 (signature) である。

A 各電荷分布における電位の表式の導出

基準点を $\mathbf{r}_0$ としたときの電位 $\phi(\mathbf{r})$ は,

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s}$$

で定義される。静電場の線積分の値は端点のみで決まるので、線積分は適当な経路をとって計算すればよい。² 以下で、電荷が点状・直線状・平面状に分布している場合の基準点 $\mathbf{r}_0$ に対する電位の表式を導出する。

A.1 球対称分布

電荷分布の中心を原点とする球座標 (r, θ, φ) をとる。電荷分布が球対称であることから、電場は $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \mathbf{e}_r$ と書ける。³ $\mathbf{r}$ を通り原点を端点とする半直線と原点中心で半径 $r_0 = |\mathbf{r}_0|$ の球面との交点を $\mathbf{r}'_0$ とする。 $\mathbf{r}_0$ から $\mathbf{r}$ までの経路を、 $\mathbf{r}_0$ から $\mathbf{r}'_0$ まで球面上を通る適当な経路 C_1 と、 $\mathbf{r}'_0$ から $\mathbf{r}$ までの線分 C_2 の和とする。経路 C_1 上では $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ より積分は 0, C_2 上では $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E(s)ds$ であるから、

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\mathbf{r}'_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_{r_0}^r E(s) ds$$

と書ける。ここで、 $r = |\mathbf{r}|$ である。電位は $r = |\mathbf{r}|$ のみに依存するので $\phi(r)$ と書いてよい。また、電荷が有界な領域のみに存在する場合、電位は無限遠で定数となるので、この定数を電位の基準 $\phi(\infty) = 0$ と選ぶことが多い。これは、 $r_0 \rightarrow \infty$ として、電位を以下のように表すことに相当する。

$$\phi(r) = - \int_{\infty}^r E(s) ds.$$

A.2 直線状分布

電荷分布の中心軸上の任意の点を原点とした円柱座標 (ρ, φ, z) をとる。電荷分布の対称性から電場は $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(\rho) \mathbf{e}_\rho$ と書ける。⁴ $\mathbf{r}$ を含み中心軸に垂直な平面と $\mathbf{r}_0$ を通り中心軸に平行な直線の交点を $\mathbf{r}'_0$ とする。 $\mathbf{r}_0$ から $\mathbf{r}$ までの経路を、 $\mathbf{r}_0$ から $\mathbf{r}'_0$ までの線分 C_1 と、 $\mathbf{r}'_0$ から $\mathbf{r}$ の線分 C_2 の和とする。経路 C_1 上では $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ より積分は 0, C_2 上では $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E(s)ds$ であるから、

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\mathbf{r}'_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\rho_0}^{\rho} E(s) ds$$

と書ける。球対称分布と異なり、電荷分布が軸から有限の範囲に限られていても電位は無限遠で発散することがあるので、一般に電位の基準を無限遠にとることはできない。

A.3 平面状分布

電荷が分布した平面に垂直に z 軸をとる。電荷分布の対称性から電場は $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(z) \mathbf{e}_z$ と書ける。⁵ $\mathbf{r}$ を通り平面に垂直な直線と $\mathbf{r}_0$ を含み電荷分布に平行な面の交点を $\mathbf{r}'_0$ とする。 $\mathbf{r}_0$ から $\mathbf{r}$ までの経路を、 $\mathbf{r}_0$ から $\mathbf{r}'_0$ までの線分 C_1 と、 $\mathbf{r}'_0$ から $\mathbf{r}$ の線分 C_2 の和とする。経路 C_1 上では $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ より積分は 0, C_2 上では $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E(s)ds$ であるから、

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\mathbf{r}'_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_{z_0}^z E(s) ds$$

と書ける。球対称分布と異なり、電荷分布が平面から有限の範囲に限られていても電位は無限遠で発散することがあるので、一般に電位の基準を無限遠にとることはできない。

² 静電場では渦なしの法則 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ (Faraday–Maxwell の法則 $\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = \mathbf{0}$ で定常な場合を考えて $\partial_t \mathbf{B} = \mathbf{0}$ としたもの) が成り立つ。 $\mathbf{r}_0$ と $\mathbf{r}$ を結ぶ 2 つの経路 C_1 と C_2 に沿った線積分の差は、Stokes の定理を用いて

$$\int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{C_1 - C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

となり、線積分が経路の選び方に依らないことがわかる。ここで、 S は閉路 $(C_1 - C_2)$ を周囲とする任意の曲面である。この事実が、電位 (スカラーポテンシャル) を定義することができる根拠になっている。

³ 系がある点に関する球対称性を持つとは、その点を通る任意の軸の周りの回転対称性を持つことである。

⁴ 直線状分布が持つ対称性は、中心軸まわりの回転対称性、軸方向の並進対称性、軸に垂直な任意の面に関する鏡映対称性である。静電場では渦なしの法則 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ により電位が定義でき、中心軸まわりの回転対称性と軸方向の並進対称性により、電位は軸からの距離 ρ のみの関数となる。電場は電位の勾配 (に負号をつけたもの) なので、 φ や z に依らない。つまり、軸に垂直な任意の面に関する鏡映対称性は渦なしの法則 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ の帰結である。電場は Gauss の法則だけでは決まらず、暗黙の裡に $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ を用いていることに注意。同じ直線状分布でも、電流がつくる磁場では $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \neq \mathbf{0}$ であり、磁場 $\mathbf{B}$ は鏡映対称性を持たない。

⁵ 平面状分布が持つ対称性は、平面に平行な任意の方向の並進対称性と、平面に垂直な任意の軸のまわりの回転対称性である。