

演習：Biot-Savart の法則【電磁気学】

番号に*印がついた問題は計算がやや複雑なので、初めは飛ばしてもよい。対称性がよく Ampère の法則を用いて簡単に磁場が求まる問題もあるが、Biot-Savart の法則を書き下す練習として取り組むとよい。なお、この演習問題で「磁場」とは「磁束密度」を表すものとする。

1. 直線電流

(1.1) 無限に長い直線上を流れる電流 I がつくる磁場を求めよ。

*(1.2) 無限に長い半径 a の円柱上を軸方向に一樣に流れる電流 I がつくる磁場を求めよ。

(1.3) 長さ L の線分上を流れる電流 I がつくる磁場を求めよ。

2. 円電流

半径 a の円周上を電流 I が流れている。

(2.1) 円の中心軸上における磁場を求めよ。

*(2.2) 任意の点における磁場を求めよ。ただし、積分を書き下すだけでよい。

*(2.3) 円から十分に離れた点における磁場を求めよ。

*(2.4) 円の中心付近の磁場を求めよ。

3. ソレノイド

半径 a 、単位長あたりの巻き数 n の無限に長いソレノイドに電流 I が流れている。

(3.1) 中心軸上の磁場を求めよ。

*(3.2) 任意の点における磁場を求めよ。

4. その他

(4.1) (長方形コイル) 一辺が $2a$ と $2b$ の長方形コイルに電流 I が流れている。コイルの中心軸 (コイルを含む平面に垂直で長方形の対角線の交点を通る直線) 上の磁場を求めよ。

(4.2) (平面電流) 幅 a の無限に長い平面上を長さ方向に一樣に流れる電流 I がつくる磁場を求めよ。

*(4.3) (回転荷電球殻) 電荷 Q が一樣に分布した半径 a の球殻が一定の角速度 ω で回転している。球殻が内外につくる磁場を求めよ。

*(4.4) (Helmholtz コイル) 半径 a の2つの円形コイルを中心軸に沿って b だけ離して平行に置く。2つのコイルに流れる電流がともに I で向きが等しいとき、中心軸上で2つのコイルから等距離の点付近での磁場を求めよ。

電磁気学の演習問題【Biot-Savart の法則】 解答例

注意 直交座標は右手系とし、ある軸方向とその周りの回転方向の関係は、右ネジの関係にある場合を正方向とする。Heaviside の階段関数を Θ と書く。

1. 直線電流

(1.1) 電流の経路である直線を z 軸にとる。 z 軸方向の並進対称性と、 z 軸周りの回転対称性から、磁場を求める点を $\mathbf{r} = [\rho, 0, 0] = \rho \mathbf{e}_x$ として一般性を失わない。¹ 電流の経路は $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3; s \mapsto \mathbf{s} = [0, 0, s] = s \mathbf{e}_z$ と表すことができ、 $d\mathbf{s} = ds \mathbf{e}_z$ である。このとき、

$$\begin{aligned}\mathbf{r} - \mathbf{s} &= [\rho, 0, -s] = \rho \mathbf{e}_x - s \mathbf{e}_z, \\ d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s}) &= ds \mathbf{e}_z \times (\rho \mathbf{e}_x - s \mathbf{e}_z) = \rho ds \mathbf{e}_y, \\ |\mathbf{r} - \mathbf{s}| &= (\rho^2 + s^2)^{1/2},\end{aligned}$$

であるから、磁場は以下のように計算できる。²

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\rho \mathbf{e}_x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \rho \mathbf{e}_y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{(\rho^2 + s^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \rho \mathbf{e}_y \left[\frac{s}{\rho^2(\rho^2 + s^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_y.$$

(1.2) 円柱の中心軸を z 軸にとる。 z 軸方向の並進対称性と、 z 軸周りの回転対称性から、磁場を求める点を $\mathbf{r} = [\rho, 0, 0] = \rho \mathbf{e}_x$ として一般性を失わない。位置 $\mathbf{r}' = [\rho' \cos \phi', \rho' \sin \phi', z'] = \rho' \cos \phi' \mathbf{e}_x + \rho' \sin \phi' \mathbf{e}_y + z' \mathbf{e}_z$ における電流密度は、

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{I}{\pi a^2} \mathbf{e}_z \Theta(a - \rho')$$

と書けるから、Biot-Savart の法則より、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{\pi a^2} \int_0^a d\rho' \rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\mathbf{e}_z \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

が得られる。ここで、

$$\begin{aligned}\mathbf{r} - \mathbf{r}' &= (\rho - \rho' \cos \phi') \mathbf{e}_x - \rho' \sin \phi' \mathbf{e}_y - z' \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_z \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \mathbf{e}_z \times ((\rho - \rho' \cos \phi') \mathbf{e}_x - \rho' \sin \phi' \mathbf{e}_y - z' \mathbf{e}_z) = \rho' \sin \phi' \mathbf{e}_x + (\rho - \rho' \cos \phi') \mathbf{e}_y, \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= (\rho^2 + (\rho')^2 - 2\rho\rho' \cos \phi' + (z')^2)^{1/2},\end{aligned}$$

であるから、磁場は、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\rho \mathbf{e}_x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{\pi a^2} \int_0^a d\rho' \rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\rho' \sin \phi' \mathbf{e}_x + (\rho - \rho' \cos \phi') \mathbf{e}_y}{(\rho^2 + (\rho')^2 - 2\rho\rho' \cos \phi' + (z')^2)^{3/2}}$$

と書ける。 ϕ' 積分に着目すれば $B_x = 0$ となることがわかる。また、 B_y は、

$$\begin{aligned}B_y(\mathbf{r}) &= B_y(\rho \mathbf{e}_x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{\pi a^2} \int_0^a d\rho' \rho' \int_0^{2\pi} d\phi' (\rho - \rho' \cos \phi') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(\rho^2 + (\rho')^2 - 2\rho\rho' \cos \phi' + (z')^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{\pi a^2} \int_0^a d\rho' \rho' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\rho - \rho' \cos \phi'}{\rho^2 + (\rho')^2 - 2\rho\rho' \cos \phi'} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{\pi a^2} \cdot \frac{2\pi}{\rho} \int_0^a d\rho' \rho' \Theta(\rho - \rho') \\ &= \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \Theta(a - \rho) + \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \Theta(\rho - a)\end{aligned}$$

¹ $y = 0$ と選ぶことに抵抗を感じる場合は、円柱座標系の基本ベクトル $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$ を用いて $\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho$ としておけばよい。このとき最終結果の $\mathbf{e}_y$ は $\mathbf{e}_\phi$ に置き換わる。ここでは分かりやすさを重視して Descartes 座標系の基本ベクトルを用いた。これ以降の問題でも同様。脚注 3 も参照。

² 不定積分 $\int \frac{ds}{(\rho^2 + s^2)^{3/2}} = \frac{s}{\rho^2(\rho^2 + s^2)^{1/2}}$ が難しければ、 $s = \rho \tan \theta$ と置換積分すればよい。

と計算できる．ここで，以下の積分公式を用いた (付録 C)．

$$\int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\rho - \rho' \cos \phi'}{\rho^2 + (\rho')^2 - 2\rho\rho' \cos \phi'} = \frac{2\pi}{\rho} \Theta(\rho - \rho') .$$

したがって，電流が流れる円柱の内部では磁場の大きさは中心軸からの距離 ρ に比例し，円柱の外部では無限に長い直線電流がつくる磁場と同じ磁場ができる．

(1.3) 電流の流れる線分を z 軸の $z \in (-L/2, L/2)$ の部分とし，電流は z 軸の正方向に流れるとする． z 軸周りの回転対称性から，磁場を求める点を $\mathbf{r} = [\rho, 0, z] = \rho \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z$ として一般性を失わない．電流の経路は $C : [-L/2, L/2] \rightarrow \mathbb{R}^3; s \mapsto \mathbf{s} = [0, 0, s] = s \mathbf{e}_z$ と表すことができ， $d\mathbf{s} = ds \mathbf{e}_z$ である．このとき，

$$\begin{aligned} \mathbf{r} - \mathbf{s} &= [\rho, 0, z - s] = \rho \mathbf{e}_x + (z - s) \mathbf{e}_z , \\ d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s}) &= ds \mathbf{e}_z \times (\rho \mathbf{e}_x + (z - s) \mathbf{e}_z) = \rho ds \mathbf{e}_y , \\ |\mathbf{r} - \mathbf{s}| &= (\rho^2 + (z - s)^2)^{1/2} , \end{aligned}$$

であるから，磁場は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mathbf{B}(\rho, 0, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \rho \mathbf{e}_y \int_{-L/2}^{L/2} \frac{ds}{(\rho^2 + (z - s)^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \rho \mathbf{e}_y \left[\frac{-(z - s)}{\rho^2(\rho^2 + (z - s)^2)^{1/2}} \right]_{-L/2}^{L/2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \left(\frac{z + L/2}{(\rho^2 + (z + L/2)^2)^{1/2}} - \frac{z - L/2}{(\rho^2 + (z - L/2)^2)^{1/2}} \right) \mathbf{e}_y . \end{aligned}$$

ここで， z 軸と $\mathbf{r} - (\pm L/2)\mathbf{e}_z$ のなす角を $\theta_{\pm}$ とすると，以下のようにも書ける．

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\rho, 0, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} (\cos \theta_- - \cos \theta_+) \mathbf{e}_y .$$

補足 線分に電流を流すためには線分の一端に溜めた電荷を他端に流す必要があり，供給側の電荷が 0 になると電流が流れなくなるので，定常電流ではない．実際，定常電流に対しては任意の閉曲面を貫く電流の総和は 0 であるが，線分の一端を含む閉曲面を貫く電流の総和は $\pm I \neq 0$ である．しかし，一定の電流が流れている間は定常電流が流れているとみなして Biot-Savart の法則を適用することができる．

2. 円電流

円の中心を原点にとり，円を含む面に垂直な方向に z 軸をとる．電流の経路は $C : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3; \phi' \mapsto \mathbf{s} = [a \cos \phi', a \sin \phi', 0] = a \cos \phi' \mathbf{e}_x + a \sin \phi' \mathbf{e}_y$ と書くことができる．このとき， $d\mathbf{s} = a d\phi' (-\sin \phi' \mathbf{e}_x + \cos \phi' \mathbf{e}_y)$ である．

(2.1) 磁場を求める位置が $\mathbf{r} = [0, 0, z] = z \mathbf{e}_z$ であることから，

$$\begin{aligned} \mathbf{r} - \mathbf{s} &= -a \cos \phi' \mathbf{e}_x - a \sin \phi' \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z , \\ d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s}) &= a d\phi' (-\sin \phi' \mathbf{e}_x + \cos \phi' \mathbf{e}_y) \times (-a \cos \phi' \mathbf{e}_x - a \sin \phi' \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z) \\ &= a d\phi' (z \cos \phi' \mathbf{e}_x + z \sin \phi' \mathbf{e}_y + a \mathbf{e}_z) , \\ |\mathbf{r} - \mathbf{s}| &= |-a \cos \phi' \mathbf{e}_x - a \sin \phi' \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z| = (a^2 + z^2)^{1/2} , \end{aligned}$$

を得る.³ したがって，求める磁場は，

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(z \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{z \sin \phi' \mathbf{e}_y + z \cos \phi' \mathbf{e}_x + a \mathbf{e}_z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z .$$

³ 円柱座標系の基本ベクトルを用いると，経路は $C : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3; \phi' \mapsto \mathbf{s} = a \mathbf{e}_{\rho'}$ と表され， $d\mathbf{s} = a d\phi' \mathbf{e}_{\phi'}$ であるから，

$$\begin{aligned} \mathbf{r} - \mathbf{s} &= z \mathbf{e}_z - a \mathbf{e}_{\rho'} , \\ d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s}) &= a d\phi' \mathbf{e}_{\phi'} \times (z \mathbf{e}_z - a \mathbf{e}_{\rho'}) = (a z \mathbf{e}_{\rho'} + a^2 \mathbf{e}_z) d\phi' , \\ |\mathbf{r} - \mathbf{s}| &= |a \mathbf{e}_{\rho'} - z \mathbf{e}_z| = (a^2 + z^2)^{1/2} , \end{aligned}$$

と，より簡単に計算できる．これ以降も円柱座標系の基本ベクトルを用いることで簡単に計算できる状況が多々あるが，直感的な分かりやすさを重視して，(空間に固定された) 直交座標系の基本ベクトルを用いて議論を進める．

(2.2) z 軸周りの回転対称性から、磁場を求める点の座標を $\mathbf{r} = [\rho, 0, z] = \rho \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z$ とし一般性を失わない。

$$\begin{aligned}\mathbf{r} - \mathbf{s} &= (\rho - a \cos \phi') \mathbf{e}_x - a \sin \phi' \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z, \\ d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s}) &= ad\phi'(-\sin \phi' \mathbf{e}_x + \cos \phi' \mathbf{e}_y) \times ((\rho - a \cos \phi') \mathbf{e}_x - a \sin \phi' \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z) \\ &= ad\phi'(z \cos \phi' \mathbf{e}_x + z \sin \phi' \mathbf{e}_y + (a - \rho \cos \phi') \mathbf{e}_z), \\ |\mathbf{r} - \mathbf{s}| &= |(\rho - a \cos \phi') \mathbf{e}_x - a \sin \phi' \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z| = (a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi')^{1/2},\end{aligned}$$

であるから、求める磁場は、

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mathbf{B}(\rho \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{z \cos \phi' \mathbf{e}_x + z \sin \phi' \mathbf{e}_y + (a - \rho \cos \phi') \mathbf{e}_z}{(a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi')^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{z \cos \phi' \mathbf{e}_x + (a - \rho \cos \phi') \mathbf{e}_z}{(a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi')^{3/2}}\end{aligned}$$

となる。 ϕ' 積分に着目すれば $B_y = 0$ となることがわかる。

(2.3) $(\rho^2 + z^2)^{1/2} \gg a$ のとき、

$$(a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi')^{-3/2} \simeq (\rho^2 + z^2)^{-3/2} \left(1 + \frac{3a\rho \cos \phi'}{\rho^2 + z^2} \right)$$

と近似できるから、前問で求めた B_x と B_y は、それぞれ以下のように評価できる。

$$\begin{aligned}B_x(\mathbf{r}) &= B_x(\rho \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{z \cos \phi'}{(a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi')^{3/2}} \\ &\simeq \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' \cos \phi' \left(1 + \frac{3a\rho \cos \phi'}{\rho^2 + z^2} \right) \\ &= \frac{\mu_0(I\pi a^2)}{4\pi} \frac{3\rho z}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_z(\mathbf{r}) &= B_z(\rho \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{a - \rho \cos \phi'}{(a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi')^{3/2}} \\ &\simeq \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' (a - \rho \cos \phi') \left(1 + \frac{3a\rho \cos \phi'}{\rho^2 + z^2} \right) \\ &= \frac{\mu_0(I\pi a^2)}{4\pi} \frac{-\rho^2 + 2z^2}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}}.\end{aligned}$$

補足 磁気双極子モーメントを $\mathbf{m} = I\pi a^2 \mathbf{e}_z$ と同定でき、座標系に依存しない形で以下のように書ける。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right).$$

(2.4) $(\rho^2 + z^2)^{1/2} \ll a$ のとき、

$$(a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi')^{-3/2} \simeq \frac{1}{a^3} \left(1 + \frac{3\rho \cos \phi'}{a} \right)$$

と近似できるから、 B_x と B_y は、それぞれ以下のように評価できる。

$$\begin{aligned}
B_x(\mathbf{r}) &= B_x(\rho \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{z \cos \phi'}{(a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi')^{3/2}} \\
&\simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\phi' z \cos \phi' \left(1 + \frac{3\rho \cos \phi'}{a}\right) \\
&= \frac{\mu_0 I}{2a} \cdot \frac{3\rho z}{2a^2} . \\
B_z(\mathbf{r}) &= B_z(\rho \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{a - \rho \cos \phi'}{(a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi')^{3/2}} \\
&\simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \int_0^{2\pi} d\phi' (a - \rho \cos \phi') \left(1 + \frac{3\rho \cos \phi'}{a}\right) , \\
&= \frac{\mu_0 I}{2a} \left(1 - \frac{3\rho^2}{2a^2}\right) .
\end{aligned}$$

したがって、円の中心付近にはほぼ様な磁場 $\mathbf{B} = (\mu_0 I/2a) \mathbf{e}_z$ ができ、ずれは (ρ/a) や (z/a) の 2 次のオーダーとなる。さらに一様性を高めたい場合には、同じ円電流コイルを 2 つ用意し、中心軸に沿って半径と同じ距離 a だけ離して平行に置けばよい (Helmholtz コイル)。

3. ソレノイド

ソレノイドの中心軸を z 軸にとる。ソレノイドは円電流が軸方向に並んだものとみなすことができるので、円電流がつくる磁場の結果を用いることができる。

(3.1) z 軸方向の並進対称性から、磁場を求める点を原点 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ にとって一般性を失わない。このとき、 $z = z'$ 付近の幅 dz' にある電流 $nIdz'$ が原点 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ につくる磁場は、

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = d\mathbf{B}(\mathbf{0}) = \frac{\mu_0(nIdz')a^2}{2(a^2 + (z')^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z$$

となるので、これを $z' \in (-\infty, \infty)$ で積分して、求める磁場は以下ようになる。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{0}) = \int_{z'=-\infty}^{z'=\infty} d\mathbf{B}(\mathbf{0}) = \frac{\mu_0 n I a^2}{2} \mathbf{e}_z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(a^2 + (z')^2)^{3/2}} = \mu_0 n I \mathbf{e}_z .$$

(3.2) z 軸方向の並進対称性と z 軸周りの回転対称性から、磁場を求める点の座標を $\mathbf{r} = [\rho, 0, 0] = \rho \mathbf{e}_x$ として一般性を失わない。このとき、 $z = z'$ 付近の幅 dz' にある電流 $nIdz'$ が $\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_x$ につくる磁場は、

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = d\mathbf{B}(\rho \mathbf{e}_x) = \frac{\mu_0(nIdz')a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{-z' \cos \phi' \mathbf{e}_x + (a - \rho \cos \phi') \mathbf{e}_z}{(a^2 + \rho^2 + (z')^2 - 2a\rho \cos \phi')^{3/2}}$$

となる。これを $z' \in (-\infty, \infty)$ で積分して、求める磁場は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mathbf{B}(\rho \mathbf{e}_x) = \int_{z'=-\infty}^{z'=\infty} d\mathbf{B}(\rho \mathbf{e}_x) \\
&= \frac{\mu_0 n I a}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{-z' \cos \phi' \mathbf{e}_x + (a - \rho \cos \phi') \mathbf{e}_z}{(a^2 + \rho^2 + (z')^2 - 2a\rho \cos \phi')^{3/2}} \\
&= \frac{\mu_0 n I a}{4\pi} \mathbf{e}_z \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{a - \rho \cos \phi'}{(a^2 + \rho^2 + (z')^2 - 2a\rho \cos \phi')^{3/2}} \\
&= \frac{\mu_0 n I a}{2\pi} \mathbf{e}_z \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{a - \rho \cos \phi'}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \phi'} \\
&= \mu_0 n I \mathbf{e}_z \Theta(a - \rho) .
\end{aligned}$$

最後の等式には付録 C の積分公式を用いた。つまり、ソレノイド内部 ($\rho < a$) には (中心軸上と同じ) 様な磁場ができ、ソレノイド外部 ($\rho > a$) には磁場はできない。

4. その他

(4.1) (長方形コイル) 長方形コイルの対角線の交点を原点とし、長さ $2a$ と $2b$ の辺に平行に x 軸と y 軸をとり、中心軸を z 軸とする。電流の方向は z 軸に対して右ネジの方向とする。電流の経路は、以下の 4 つの経路の和である。

$$\begin{aligned} C_1 : [-a, a] &\rightarrow \mathbb{R}^3; s \mapsto s \mathbf{e}_x - b \mathbf{e}_y, \\ C_2 : [-b, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3; s \mapsto \mathbf{s} = [a, s, 0] = a \mathbf{e}_x + s \mathbf{e}_y, \\ C_3 : [-a, a] &\rightarrow \mathbb{R}^3; s \mapsto \mathbf{s} = [-s, b, 0] = -s \mathbf{e}_x + b \mathbf{e}_y, \\ C_4 : [-b, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3; s \mapsto \mathbf{s} = [-a, -s, 0] = -a \mathbf{e}_x - s \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

磁場を求める点を $\mathbf{r} = [0, 0, z] = z \mathbf{e}_z$ とする。経路 C_1 について、

$$\begin{aligned} d\mathbf{s} &= [1, 0, 0] ds = ds \mathbf{e}_x, \\ \mathbf{r} - \mathbf{s} &= [-s, b, z] = -s \mathbf{e}_x + b \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z, \\ d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s}) &= [0, -z, b] ds = (-z \mathbf{e}_y + b \mathbf{e}_z) ds, \\ |\mathbf{r} - \mathbf{s}| &= (s^2 + b^2 + z^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

より、経路 C_1 上の電流が z 軸上につくる磁場 $\mathbf{B}_1(\mathbf{r})$ は、

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_1(z \mathbf{e}_z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} (-z \mathbf{e}_y + b \mathbf{e}_z) \int_{-a}^a \frac{ds}{(s^2 + b^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} (-z \mathbf{e}_y + b \mathbf{e}_z) \left[\frac{s}{(b^2 + z^2)(s^2 + b^2 + z^2)^{1/2}} \right]_{-a}^a \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} (-z \mathbf{e}_y + b \mathbf{e}_z) \cdot \frac{2a}{(b^2 + z^2)(a^2 + b^2 + z^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

経路 C_3 について、

$$\begin{aligned} d\mathbf{s} &= [-1, 0, 0] ds = -ds \mathbf{e}_x, \\ \mathbf{r} - \mathbf{s} &= [s, b, z] = s \mathbf{e}_x + b \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z, \\ d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s}) &= [0, z, b] ds = (z \mathbf{e}_y + b \mathbf{e}_z) ds, \\ |\mathbf{r} - \mathbf{s}| &= (s^2 + b^2 + z^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

より、経路 C_3 上の電流が z 軸上につくる磁場 $\mathbf{B}_3(\mathbf{r})$ は、 $\mathbf{B}_1(\mathbf{r})$ の z を $-z$ に置き換えて、

$$\mathbf{B}_3(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_3(z \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} (z \mathbf{e}_y + b \mathbf{e}_z) \cdot \frac{2a}{(b^2 + z^2)(a^2 + b^2 + z^2)^{1/2}}.$$

したがって、

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_3(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_1(z \mathbf{e}_z) + \mathbf{B}_3(z \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{4ab}{(b^2 + z^2)(a^2 + b^2 + z^2)^{1/2}} \mathbf{e}_z.$$

経路 C_2 と C_4 上の電流が z 軸上につくる磁場 $\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_4(\mathbf{r})$ は、 $\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_3(\mathbf{r})$ の表式で a と b を入れ替えて、

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_4(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_2(z \mathbf{e}_z) + \mathbf{B}_4(z \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{4ab}{(a^2 + z^2)(a^2 + b^2 + z^2)^{1/2}} \mathbf{e}_z.$$

以上より、長方形コイルを流れる電流 I が z 軸上につくる磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ は、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(z \mathbf{e}_z) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i(z \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{4ab}{(a^2 + b^2 + z^2)^{1/2}} \left(\frac{1}{a^2 + z^2} + \frac{1}{b^2 + z^2} \right) \mathbf{e}_z.$$

特に、原点 $z = 0$ における磁場は、

$$\mathbf{B}(\mathbf{0}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{4ab}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{4(a^2 + b^2)^{1/2}}{ab} \mathbf{e}_z.$$

補足 1 正方形 ($a = b$) のときは、 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{8a^2}{(a^2 + z^2)(2a^2 + a^2)^{1/2}} \mathbf{e}_z$.

補足 2 $a, b \ll |z|$ のとき

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(z \mathbf{e}_z) \simeq \frac{2\mu_0 Iab}{\pi z^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2 \cdot \frac{4Iab}{z^3} \mathbf{e}_z$$

より、磁気モーメントは $\mathbf{m} = 4Iab \mathbf{e}_z = IS \mathbf{e}_z$ と同定できる。⁴ $S = 4ab$ は長方形の面積である。

(4.2) (平面電流) 電流が流れる平面に長さ方向 (電流の方向) を y 軸とした x - y 座標をとる。平面が $-a/2 \leq x \leq a/2$ にあるとすると、電流密度は、

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{I}{a} \mathbf{e}_y \delta(z) \Theta\left(\frac{a}{2} - |x|\right)$$

と表すことができるから、磁場は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-a/2}^{a/2} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{\mathbf{e}_y \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-a/2}^{a/2} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{\mathbf{e}_y \times ((x - x') \mathbf{e}_x + (y - y') \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z)}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-a/2}^{a/2} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{z \mathbf{e}_x - (x - x') \mathbf{e}_z}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \int_{-a/2}^{a/2} dx' \frac{z \mathbf{e}_x - (x - x') \mathbf{e}_z}{(x - x')^2 + z^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left(\text{Arctan}\left(\frac{a + 2x}{2z}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{a - 2x}{2z}\right) \right) \mathbf{e}_x + \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{(x + a/2)^2 + z^2}{(x - a/2)^2 + z^2} \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

補足 平面の幅が無限に広い場合には、面電流密度 $K = I/a$ を一定に保ったまま $a \rightarrow \infty$ として、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{\mu_0 K}{2} \cdot \frac{z}{|z|} \mathbf{e}_x$$

となる。つまり、面に平行かつ電流に垂直で、 $z > 0$ と $z < 0$ の領域で互いに逆向きの一様磁場ができる。

(4.3) (回転荷電球殻) 電荷は一様に分布しているので、面電荷密度 $\sigma_e = Q/4\pi a^2$ は一定である。球殻の中心を原点にとり、角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}$ とする。角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転する点 $\mathbf{r}$ の速度は $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ と書けるから、電流密度は、

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma_e \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \delta(r - a)$$

と表すことができる。したがって、Biot-Savart の法則は、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \sigma_e a^2 \oint d\Omega' \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

となる。ここで、 $\mathbf{r}$ の方向に z 軸をとり、 $\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}'$ を以下のように書く。

$$\mathbf{r} = [0, 0, r] = r \mathbf{e}_z,$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega [\sin \theta, 0, \cos \theta] = \omega \sin \theta \mathbf{e}_x + \omega \cos \theta \mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{r}' = a [\sin \theta' \cos \phi', \sin \theta' \sin \phi', \cos \theta'] = a \sin \theta' \cos \phi' \mathbf{e}_x + a \sin \theta' \sin \phi' \mathbf{e}_y + a \cos \theta' \mathbf{e}_z.$$

回転軸周りの回転対称性から $\omega_y = 0$ としてよいことを用いた。⁵ ここで、 θ は回転軸 ($\boldsymbol{\omega}$ の方向) と位置ベクトル $\mathbf{r}$ のなす角を表す定数であることに注意。このとき、

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = -a \sin \theta' \cos \phi' \mathbf{e}_z - a \sin \theta' \sin \phi' \mathbf{e}_y + (r - a \cos \theta') \mathbf{e}_z,$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta')^{1/2},$$

⁴磁気モーメント $\mathbf{m}$ がつくる磁場は $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right)$ であり、 $\mathbf{m} = m \mathbf{e}_z, \mathbf{r} = z \mathbf{e}_z$ のとき、 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{z^3} \mathbf{e}_z$ となる。多重展開の各項の z 依存性 (r 依存性) は異なるので、 z 軸上の磁場のみから双極子モーメントを同定することができる。一般に、平面上の閉曲線を流れる電流 I の磁気双極子モーメント $\mathbf{m}$ は、閉曲線が囲む面積を S として、 $\mathbf{m} = IS \mathbf{e}_z$ である。ただし、 $\mathbf{e}_z$ は平面に垂直で電流に対して右ネジの方向である。

⁵系の回転対称性から回転軸を z 軸とし、 $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ と表したくなるが、そうすると積分の分母の根号の中に天頂角 θ' と方位角 ϕ' の両方が現れて手に負えなくなる。

となる． $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ は方位角 ϕ' を含まないから，角度積分は，

$$\oint d\Omega' \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \int_0^\pi d\theta' \frac{\sin \theta'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \int_0^{2\pi} d\phi' (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

と書ける． ϕ' 積分を先に計算すると，

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi' (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \int_0^{2\pi} d\phi' \left((\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}' - (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{r} + (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}') \boldsymbol{\omega} \right) \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi' \left(r\omega \cos \theta \mathbf{r}' - ar \cos \theta' \boldsymbol{\omega} - a\omega (\sin \theta \sin \theta' \cos \phi' + \cos \theta \cos \theta') \mathbf{r}' + a^2 \boldsymbol{\omega} \right) \\ &= -\pi a^2 \omega \sin \theta \sin^2 \theta' \mathbf{e}_x + 2\pi a \omega \cos \theta \cos \theta' (r - a \cos \theta') \mathbf{e}_z + 2\pi a (a - r \cos \theta') \boldsymbol{\omega} . \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mathbf{B}(r \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \sigma_e a^2 \oint d\Omega' \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \pi \sigma_e a^3 \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \frac{-a\omega \sin \theta \sin^2 \theta' \mathbf{e}_x + 2\omega \cos \theta \cos \theta' (r - a \cos \theta') \mathbf{e}_z + 2(a - r \cos \theta') \boldsymbol{\omega}}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta')^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \pi \sigma_e a^3 \int_{-1}^1 dt \frac{-a\omega \sin \theta (1 - t^2) \mathbf{e}_x + 2\omega \cos \theta t (r - at) \mathbf{e}_z + 2(a - rt) \boldsymbol{\omega}}{(a^2 + r^2 - 2art)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{8\pi \sigma_e a \omega}{3} \Theta(a - r) + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{4\pi \sigma_e a^4 \omega}{3r^3} (-\sin \theta \mathbf{e}_x + 2 \cos \theta \mathbf{e}_z) \Theta(r - a) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{8\pi \sigma_e a \omega}{3} \Theta(a - r) + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{4\pi \sigma_e a^4}{3} \left(\frac{3(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\omega}}{r^3} \right) \Theta(r - a) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2Q\omega}{3a} \Theta(a - r) + \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Qa^2}{3} \left(\frac{3(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\omega}}{r^3} \right) \Theta(r - a) \end{aligned}$$

と求まる.⁶ ここで， $\mathbf{m} = \frac{Qa^2 \boldsymbol{\omega}}{3}$ とおけば， $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\mathbf{m}}{a^3} \Theta(a - r) + \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right) \Theta(r - a)$$

と書ける．つまり，球内部 ($r < a$) には一様な磁場ができ，球外部 ($r > a$) には磁気双極子モーメント $\mathbf{m} = \frac{Qa^2 \boldsymbol{\omega}}{3}$ による磁場が生じる．

補足 球殻ではなく半径 a の球に電荷 Q が一様に分布している場合には，球外部には磁気双極子モーメント $\mathbf{m} = \frac{Qa^2 \boldsymbol{\omega}}{5}$ による磁場が生じる．この結果は，球殻の場合の磁気双極子モーメントを積分して求めることができる．

(4.4) (Helmholtz コイル) 円形コイルの中心軸に沿って z 軸をとり，コイルの z 座標を $z = \pm b/2$ とする．(2.3) の結果を用いると，それぞれのコイルが位置 $\mathbf{r} = [\rho, 0, z] = \rho \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z$ につくる磁場は，

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\pm(\mathbf{r}) &= \mathbf{B}_\pm(\rho \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{(z \mp b/2) \cos \phi' \mathbf{e}_x + (a - \rho \cos \phi') \mathbf{e}_z}{(a^2 + \rho^2 + (z \mp b/2)^2 - 2a\rho \cos \phi')^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{(z \mp b/2) \cos \phi' \mathbf{e}_x + (a - \rho \cos \phi') \mathbf{e}_z}{(l^2 - 2a\rho \cos \phi' \mp bz + r^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

となる．ここで， $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$ であり，コイル上の点と原点との距離を $l \equiv (a^2 + b^2/4)^{1/2}$ と書いた． $\rho, z \ll a, b$ のとき，

$$\begin{aligned} (l^2 - 2a\rho \cos \phi' \mp bz + r^2)^{-3/2} &= \frac{1}{l^3} \left(1 + \frac{-2a\rho \cos \phi' \mp bz}{l^2} + \frac{r^2}{l^2} \right)^{-3/2} \\ &\simeq \frac{1}{l^3} \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{-2a\rho \cos \phi' \mp bz}{l^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{r^2}{l^2} + \frac{15}{8} \left(\frac{-2a\rho \cos \phi' \mp bz}{l^2} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

⁶ t 積分は以下のように計算すればよい．分子が t^2 の場合も同様．

$$\int dt \frac{t}{(A-t)^{3/2}} = - \int du \frac{A-u}{u^{3/2}} = - \int du \left(Au^{-3/2} - u^{-1/2} \right) = 2Au^{-1/2} + 2u^{1/2} = \frac{2(2A-t)}{\sqrt{A-t}} .$$

と近似できるから、磁場の計算に必要な積分は以下のように評価できる．

$$\int_0^{2\pi} d\phi' (l^2 - 2a\rho \cos \phi' \mp bz + r^2)^{-3/2} \simeq \frac{2\pi}{l^3} \left(1 \pm \frac{3bz}{2l^2} + \frac{3(6a^2 - b^2)\rho^2 - 12(a^2 - b^2)z^2}{8l^4} \right) .$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi' \cos \phi' (l^2 - 2a\rho \cos \phi' \mp bz + r^2)^{-3/2} \simeq \frac{2\pi}{l^3} \left(\frac{3a\rho}{2l^2} \pm \frac{15ab\rho z}{4l^4} \right) .$$

以上から、

$$B_{\pm,x}(\mathbf{r}) = B_{\pm,x}(\rho \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z) \simeq \frac{\mu_0 I a^2}{2l^3} \left(\mp \frac{3b\rho}{4l^2} + \frac{3(a^2 - b^2)\rho z}{2l^4} \right) ,$$

$$B_{\pm,z}(\mathbf{r}) = B_{\pm,z}(\rho \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z) \simeq \frac{\mu_0 I a^2}{2l^3} \left(1 \pm \frac{3bz}{2l^2} + \frac{3(a^2 - b^2)(\rho^2 - 2z^2)}{4l^4} \right) ,$$

となり、2つのコイルからの寄与を加えれば、以下の磁場を得る．

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mathbf{B}(\rho \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z) = \mathbf{B}_+(\rho \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z) + \mathbf{B}_-(\rho \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z) \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{l^3} \cdot \frac{3(a^2 - b^2)\rho z}{2l^4} \mathbf{e}_x + \frac{\mu_0 I a^2}{l^3} \left(1 + \frac{3(a^2 - b^2)(\rho^2 - 2z^2)}{4l^4} \right) \mathbf{e}_z . \end{aligned}$$

補足 コイルの半径とコイル間の距離が等しい場合 ($a = b$) には、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\rho \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z) \simeq \frac{\mu_0 I a^2}{l^3} \mathbf{e}_z = \frac{8\sqrt{5}}{25} \cdot \frac{\mu_0 I}{a} \mathbf{e}_z$$

というほぼ一様な磁場ができ、そのずれは微量 (ρ/a) や (z/a) の3次のオーダーになる．このように配置されたコイルを Helmholtz コイルと呼ぶ．また、一方のコイルの中心にできる磁場は、

$$\mathbf{B}((a/2) \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 I}{2a} \mathbf{e}_z + \frac{\mu_0 I a^2}{2(2a^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z = \frac{4 + \sqrt{2}}{8} \cdot \frac{\mu_0 I}{a} \mathbf{e}_z$$

であるから、コイルに挟まれた空間の z 軸方向の磁場の一様性は、以下のように評価できる．

$$\left(\frac{4 + \sqrt{2}}{8} - \frac{8\sqrt{5}}{25} \right) \bigg/ \frac{8\sqrt{5}}{25} \simeq -0.054 = -5.4\% .$$

A Biot-Savart の法則

電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ がつくる磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ は、以下の Biot-Savart の法則で与えられる。⁷

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

特に、電流 I が変数 $\tau \in \mathcal{I}$ で媒介変数表示された経路 $C: \mathbb{R} \supset \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^3; \tau \mapsto \mathbf{s}(\tau)$ 上を流れる場合、電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ は、

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = I \int_{\mathcal{I}} d\tau \frac{d\mathbf{s}(\tau)}{d\tau} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\tau)) = I \int_C d\mathbf{s} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{s})$$

と表されるから、以下のように書ける。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_V dV' \int_C \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{s}) \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}.$$

Biot-Savart の法則

電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ がつくる磁場

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

経路 C を流れる電流 I がつくる磁場

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}.$$

B ベクトルポテンシャルを用いた解法

この演習問題の解答例では Biot-Savart の法則を直接適用することで磁場を求めてきたが、ベクトルポテンシャルと呼ばれる量を経由して磁場を求める方が見通しが良い問題もある。⁸ そこで、この付録ではベクトルポテンシャルを導入したのち、いくつかの問題に対してベクトルポテンシャルを用いた解法を示す。

B.1 ベクトルポテンシャル

磁場に関する Gauss の法則 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ より、 $\mathbf{B}$ はあるベクトル場 $\mathbf{A}$ を用いて $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ と書ける。⁹ このようなベクトル場 $\mathbf{A}$ を (磁場 $\mathbf{B}$ の) ベクトルポテンシャルと呼ぶ。磁場 $\mathbf{B}$ は電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ によってつくられるのであるから、ベクトルポテンシャルも同様に電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ によってつくられる。実際、電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ がつくるベクトルポテンシャルは、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

と書くことができる。¹⁰ これは、

$$\nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

⁷Maxwell 方程式を基本法則とする立場から見ると、Biot-Savart の法則は、Ampère の法則 ($\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$) と磁場に関する Gauss の法則 ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) からなる連立微分方程式の形式解である。

⁸電場 $\mathbf{E}$ を直接計算するよりも、静電ポテンシャル ϕ を先に計算してから $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ で電場を求めるほうが簡単な場合があるのと全く同じ。

⁹このような $\mathbf{A}$ が存在するという証明はベクトル解析の教科書などを参照のこと。ここでは、与えられたベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ の表式から磁場が $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ で計算できるということが分かればよい。

¹⁰ベクトルポテンシャルにはゲージ自由度という不定性があるが、ここでは $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を満たす Coulomb ゲージをとっている。このベクトルポテンシャルが Coulomb ゲージ条件を満たすことは、 $\nabla(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -\nabla'(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ と $\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$ より $\nabla \cdot (\mathbf{j}(\mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -\nabla' \cdot (\mathbf{j}(\mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ が成り立つことを用いると、

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \nabla \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \nabla' \cdot \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

と確かめられる。ここで、3つ目の等号では Gauss の発散定理を用い、電流密度が遠方でゼロになると仮定して表面項を落とした。Coulomb ゲージにおけるベクトルポテンシャルの表式は、電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ がつくる静電ポテンシャル (スカラーポテンシャル) の表式 $\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ と対応している。

より,

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \nabla \times \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

となることから確かめられる. また, 電流 I が変数 $\tau \in \mathcal{I}$ で媒介変数表示される経路 $C: \mathbb{R} \supset \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^3; \tau \mapsto \mathbf{s}(\tau)$ 上を流れる場合には, 電流密度が $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = I \int_C d\mathbf{s} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{s})$ と書けることを用いると, 以下のように書ける.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_V dV' \int_C d\mathbf{s} \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}.$$

ベクトルポテンシャル

電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ がつくるベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

経路 C を流れる電流 I がつくるベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|}.$$

B.2 ベクトルポテンシャルを用いた解答

B. (2.2)

円の中心を原点にとり, 円を含む面に垂直な方向に z 軸をとる. 電流の経路は $C: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3; \phi' \mapsto \mathbf{s} = [a \cos \phi', a \sin \phi', 0] = a \cos \phi' \mathbf{e}_x + a \sin \phi' \mathbf{e}_y$ と書くことができる. このとき, $d\mathbf{s} = a d\phi' (-\sin \phi' \mathbf{e}_x + \cos \phi' \mathbf{e}_y)$ である. ベクトルポテンシャルを求める点の座標を $\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z$ とすると,

$$\mathbf{r} - \mathbf{s} = (\rho - a \cos \phi') \mathbf{e}_x - a \sin \phi' \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z,$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{s}| = |(\rho - a \cos \phi') \mathbf{e}_x - a \sin \phi' \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z| = (a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi')^{1/2},$$

より, ベクトルポテンシャルは,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \mathbf{A}(\rho \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi' (-\sin \phi' \mathbf{e}_x + \cos \phi' \mathbf{e}_y)}{(a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi')^{1/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \mathbf{e}_y \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\cos \phi'}{(a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi')^{1/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \mathbf{e}_y \int_0^\pi d\phi' \frac{\cos \phi'}{(a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi')^{1/2}} \end{aligned}$$

と書ける. この積分を解析的に実行することはできないが, 以下のように楕円積分を用いて書くことができる. 無次元の変数 k を, $k \equiv \left(\frac{4a\rho}{(\rho+a)^2 + z^2} \right)^{1/2}$ で導入すると,

$$\begin{aligned} a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi &= (a + \rho)^2 + z^2 - 2a\rho(1 + \cos \phi') \\ &= (a + \rho)^2 + z^2 - 4a\rho \cos^2(\phi'/2) \\ &= \left(\frac{4a\rho}{k} \right)^2 \left(1 - k^2 \cos^2 \left(\frac{\phi'}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

と書き直すことができる． $t = \cos(\phi'/2)$ と変数変換すると， $dt = -(d\phi'/2) \sin(\phi'/2)$ より $d\phi' = -2dt/\sin(\phi'/2) = -2dt/\sqrt{1-t^2}$ となることを用いると，

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \mathbf{A}(\rho \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \mathbf{e}_y \int_0^\pi d\phi' \frac{\cos \phi'}{(a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \phi')^{1/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \mathbf{e}_y \cdot \frac{k}{4a\rho} \int_0^1 dt \frac{2t^2 - 1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{a}{\rho}\right)^{1/2} \left(\left(\frac{2}{k} - k\right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right) \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

と書ける．ここで， $K(k)$ と $E(k)$ は第 1 種および第 2 種完全楕円積分であり，以下のように定義されている．

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}, \quad E(k) = \int_0^1 dt \sqrt{\frac{1-k^2 t^2}{1-t^2}}.$$

具体的な表式は煩雑なので書かないが，磁場を求めるには，円柱座標系で

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{a}{\rho}\right)^{1/2} \left(\left(\frac{2}{k} - k\right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right) \mathbf{e}_\phi$$

と書いておき， $\nabla = \mathbf{e}_\rho \partial_\rho + \mathbf{e}_\phi (1/\rho) \partial_\phi + \mathbf{e}_z \partial_z$ を用いて $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ から計算すればよい．

B. (2.3)

十分遠方 ($r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \gg a$) では， $k \simeq 2\sqrt{a\rho}/r \ll 1$ である．このとき，

$$\begin{aligned} K(k) &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} k^2 + \frac{9\pi}{128} k^4 + \mathcal{O}(k^6), \\ E(k) &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} k^2 - \frac{3\pi}{128} k^4 + \mathcal{O}(k^6), \end{aligned}$$

と展開できるから，¹¹

$$\left(\frac{2}{k} - k\right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) = \frac{\pi}{16} k^3 + \mathcal{O}(k^5) \simeq \frac{\pi(a\rho)^{3/2}}{2r^3}$$

と評価でき，ベクトルポテンシャルは以下のように近似できる．

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\mu_0(I\pi a^2)}{4\pi} \cdot \frac{\rho}{r^3} \mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_0}{4\pi} (I\pi a^2 \mathbf{e}_z) \times \frac{\rho \mathbf{e}_\rho}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

ここで， $\mathbf{m} = I\pi a^2 \mathbf{e}_z$ は磁気双極子モーメントである．したがって，磁場は，以下のように計算できる．

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right).$$

B. (4.1) (回転荷電球殻)

電流密度は，

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \delta(r - a)$$

と表すことができるから， $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_z$ とすると，ベクトルポテンシャルは，

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \mathbf{A}(r \mathbf{e}_z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0 \sigma a^2}{4\pi} \oint d\Omega' \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0 \sigma a^3}{4\pi} \cdot 2\pi \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_z \int_{-1}^1 d\cos \theta' \frac{\cos \theta'}{(r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta')^{1/2}} \\ &= \frac{\mu_0 \sigma a^3}{4\pi} \cdot 2\pi \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_z \left(\frac{2r}{3a^2} \Theta(a - r) + \frac{2a}{3r^2} \Theta(r - a) \right) \\ &= \frac{\mu_0}{3V} \mathbf{m} \times \mathbf{r} \Theta(a - r) + \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \Theta(r - a) \end{aligned}$$

¹¹公式集を見ればよい．わざわざ楕円積分などというものを持ち出して積分を書き直した理由が，このような既によく調べられている事柄を利用するためである．そもそも三角関数なども (図形的な意味付けこそあれ) よく分からないものに名前を付けたただけであり，その有用性は，先人によって既に様々な性質が調べられているということによっている．

と計算できる。最後の表式は座標系に依らない形をしているので、磁場は、

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{3V} \mathbf{m} \times \mathbf{r} \Theta(a-r) + \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \Theta(r-a) \right) \\ &= \frac{2\mu_0 \mathbf{m}}{3V} \Theta(a-r) + \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right) \Theta(r-a) \end{aligned}$$

と求まる。¹² 階段関数 Θ の微分は第 1 項と第 2 項とで打ち消しあうことに注意。

C 積分公式

(1.2) や (3.2) などの円柱に関する問題で現れる以下の積分を評価する。

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\rho - \rho' \cos \phi'}{\rho^2 + (\rho')^2 - 2\rho\rho' \cos \phi'} &= \frac{1}{2\rho} \int_0^{2\pi} d\phi' \left(1 + \frac{\rho^2 - (\rho')^2}{\rho^2 + (\rho')^2 - 2\rho\rho' \cos \phi'} \right) \\ &= \frac{\pi}{\rho} + \frac{1}{2\rho} \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\rho^2 - (\rho')^2}{\rho^2 + (\rho')^2 - 2\rho\rho' \cos \phi'} \\ &= \frac{\pi}{\rho} + \frac{1}{2\rho} \cdot \frac{\rho^2 - (\rho')^2}{2\rho\rho'} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\alpha - \cos \phi'} . \end{aligned}$$

ここで、 $\alpha \equiv (\rho^2 + (\rho')^2)/2\rho\rho' (> 1)$ を定義した。最後の積分は (i) $t = \tan(\phi'/2)$ の置換積分を用いる方法や、(ii) 複素積分を用いる方法などで評価できる。

(i) $t = \tan(\phi'/2)$ の置換積分を用いる方法 $t = \tan(\phi'/2)$ と置換すると、¹³

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\alpha - \cos \phi'} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi'}{\alpha - \cos \phi'} = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\phi'}{\alpha - \cos \phi'} = 4 \int_0^{\infty} \frac{dt}{(\alpha - 1) + (\alpha + 1)t^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} .$$

最後の等式では $\alpha > 1$ を用いた。¹⁴

(ii) 複素積分を用いる方法 $z = e^{i\phi'}$ と置換すると、 $\cos \phi' = (e^{i\phi'} + e^{-i\phi'})/2 = (z + 1/z)/2$ と書けるから、

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\alpha - \cos \phi'} = 2i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 2\alpha z + 1} = 2i \cdot 2\pi i \cdot \frac{-1}{2\sqrt{\alpha^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} .$$

ここで、被積分関数 $f(z) = (z^2 - 2\alpha z + 1)^{-1}$ は $z = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \equiv z_{\pm}$ で 1 位の極を持つが、 $\alpha > 1$ より積分経路の内部の極が $z = z_-$ のみであり、留数が $\text{Res}_{z_-} f = (z_- - z_+)^{-1} = (-2\sqrt{\alpha^2 - 1})^{-1}$ であることを用いた。¹⁵

積分公式 (i) と (ii) のいずれの方法を用いても、以下の積分公式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{\rho - \rho' \cos \phi'}{\rho^2 + (\rho')^2 - 2\rho\rho' \cos \phi'} &= \frac{\pi}{\rho} + \frac{1}{2\rho} \cdot \frac{\rho^2 - (\rho')^2}{2\rho\rho'} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\alpha - \cos \phi'} \\ &= \frac{\pi}{\rho} + \frac{1}{2\rho} \cdot \frac{\rho^2 - (\rho')^2}{2\rho\rho'} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \\ &= \frac{\pi}{\rho} \left(1 + \frac{\rho^2 - (\rho')^2}{|\rho^2 - (\rho')^2|} \right) \\ &= \frac{2\pi}{\rho} \Theta(\rho - \rho') . \end{aligned}$$

¹² $(\nabla \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r}))_i = \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{kmn} m_m r_n) = \epsilon_{kij} \epsilon_{kmn} m_m \delta_{jn} = \epsilon_{kij} \epsilon_{kmj} m_m = 2\delta_{im} m_m = 2m_i$.
 $(\nabla \times (\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}))_i = \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{kmn} m_m \frac{r_n}{r^3}) = (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) m_m \left(\frac{\delta_{jn}}{r^3} - \frac{3r_j r_n}{r^5} \right) = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) r_i}{r^5} - \frac{m_i}{r^3}$.

¹³ この置換により $d\phi' = 2dt/(1+t^2)$, $\cos \phi' = (1-t^2)/(1+t^2)$, $\sin \phi' = 2t/(1+t^2)$ となる。

¹⁴ $\alpha < 1$ の場合には、積分は $\int_0^{\infty} \frac{du}{1-u^2}$ という形をしており、 $u = 1/v$ の置換で、

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{1-u^2} = \int_{\infty}^0 \left(-\frac{dv}{v^2} \right) \frac{1}{1-(1/v)^2} = - \int_0^{\infty} \frac{dv}{1-v^2} , \quad \therefore \int_0^{\infty} \frac{du}{1-u^2} = 0 ,$$

となる。もちろん、積分区間が被積分関数の特異点を含むから、この結果の正当化のためには何らかの正則化の手続きが必要である。

¹⁵ $\alpha < 1$ の場合には、極が積分経路 (単位円周) 上にあるから、積分の評価には正則化が必要である。例えば、極を避けるように積分経路を微小に変化させることで正則化が可能である。積分経路の変更には、2つの極 $z = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$ のそれぞれを含むか含まないかという 4通りの可能性があるが、 $\text{Res}_{z_{\pm}} f = \frac{\pm 1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} = \frac{\pm i}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$ より、一方の極のみを含むように積分経路を変更すると、積分結果が純虚数となり物理的に解釈できない。そこで、2つの極の両方を含むか、両方とも含まないかの 2通りの可能性が残るが、いずれの場合も積分結果はゼロとなる。