演習：定数係数 2 階線形微分方程式【微分方程式】

斉次方程式 (問題 1) は一般解を，非斉次方程式 (問題 2 から問題 8) は特解 y_p をひとつ求めよ．

1.

(1) $y'' = 0$

(2) $y'' + y' = 0$

(3) $y'' + y = 0$

(4) $y'' + 3y' + 2y = 0$

(5) $y'' + 2y' + 2y = 0$

(6) $y'' + 2y' + y = 0$

2.

(1) $y'' = 1$

(2) $y'' + y' = 1$

(3) $y'' + y = 1$

(4) $y'' + 3y' + 2y = 1$

(5) $y'' + 2y' + 2y = 1$

(6) $y'' + 2y' + y = 1$

3.

(1) $y'' = x^2$

(2) $y'' + y' = x^2$

(3) $y'' + y = x^2$

(4) $y'' + 3y' + 2y = x^2$

(5) $y'' + 2y' + 2y = x^2$

(6) $y'' + 2y' + y = x^2$

4.

(1) $y'' = \sin x$

(2) $y'' + y' = \sin x$

(3) $y'' + y = \sin x$

(4) $y'' + 3y' + 2y = \sin x$

(5) $y'' + 2y' + 2y = \sin x$

(6) $y'' + 2y' + y = \sin x$

5.

(1) $y'' = e^{-x}$

(2) $y'' + y' = e^{-x}$

(3) $y'' + y = e^{-x}$

(4) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$

(5) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}$

(6) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$

6.

(1) $y'' = xe^{-x}$

(2) $y'' + y' = xe^{-x}$

(3) $y'' + y = xe^{-x}$

(4) $y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$

(5) $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$

(6) $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$

7.

(1) $y'' = x^2e^{-x}$

(2) $y'' + y' = x^2e^{-x}$

(3) $y'' + y = x^2e^{-x}$

(4) $y'' + 3y' + 2y = x^2e^{-x}$

(5) $y'' + 2y' + 2y = x^2e^{-x}$

(6) $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}$

8.

(1) $y'' = e^{-x}\sin x$

(2) $y'' + y' = e^{-x}\sin x$

(3) $y'' + y = e^{-x}\sin x$

(4) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}\sin x$

(5) $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\sin x$

(6) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\sin x$

演習：定数係数 2 階線形微分方程式【微分方程式】解答

1.

(1) $y = Ax + B$

(2) $y = A + Be^{-x}$

(3) $y = A\cos x + B\sin x$

(4) $y = Ae^{-x} + Be^{-2x}$

(5) $y = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$

(6) $y = (Ax + B)e^{-x}$

2.

(1) $y_p = \dfrac{1}{2}x^2$

(2) $y_p = x$

(3) $y_p = 1$

(4) $y_p = \dfrac{1}{2}$

(5) $y_p = \dfrac{1}{2}$

(6) $y_p = 1$

3.

(1) $y_p = \dfrac{1}{12}x^4$

(2) $y_p = \dfrac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 6x) = \dfrac{1}{3}x(x^2 - 3x + 6)$

(3) $y_p = x^2 - 2$

(4) $y_p = \dfrac{1}{4}(2x^2 - 6x + 7)$

(5) $y_p = \dfrac{1}{2}(x^2 - 2x + 1)$

(6) $y_p = x^2 - 4x + 6$

4.

(1) $y_p = -\sin x$

(2) $y_p = -\dfrac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

(3) $y_p = -\dfrac{1}{2}x\cos x$

(4) $y_p = \dfrac{1}{10}(\sin x - 3\cos x)$

(5) $y_p = \dfrac{1}{5}(\sin x - 2\cos x)$

(6) $y_p = -\dfrac{1}{2}\cos x$

5.

(1) $y_p = e^{-x}$

(2) $y_p = -xe^{-x}$

(3) $y_p = \dfrac{1}{2}e^{-x}$

(4) $y_p = xe^{-x}$

(5) $y_p = e^{-x}$

(6) $y_p = \dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$

6.

(1) $y_p = (x + 2)e^{-x}$

(2) $y_p = -\dfrac{1}{2}(x^2 + 2x)e^{-x}$

(3) $y_p = \dfrac{1}{2}(x + 1)e^{-x}$

(4) $y_p = \dfrac{1}{2}(x^2 - 2x)e^{-x}$

(5) $y_p = xe^{-x}$

(6) $y_p = \dfrac{1}{6}x^3e^{-x}$

7.

(1) $y_p = (x^2 + 4x + 6)e^{-x}$

(2) $y_p = -\dfrac{1}{3}(x^3 + 3x^2 + 6x)e^{-x}$

(3) $y_p = \dfrac{1}{2}(x^2 + 2x + 1)e^{-x}$

(4) $y_p = \dfrac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 6x)e^{-x}$

(5) $y_p = (x^2 - 2)e^{-x}$

(6) $y_p = \dfrac{1}{12}x^4e^{-x}$

8.

(1) $y_p = \dfrac{1}{2}e^{-x}\cos x$

(2) $y_p = -\dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x)$

(3) $y_p = \dfrac{1}{5}e^{-x}(\sin x + 2\cos x)$

(4) $y_p = -\dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)$

(5) $y_p = -\dfrac{1}{2}xe^{-x}\cos x$

(6) $y_p = -e^{-x}\sin x$

付録 未定係数法：非斉次方程式の特解の求め方

未定係数法

定数係数 2 階線形微分方程式

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

の特解は，非斉次項 $f(x)$ が $x^k e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ や $x^k e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ (k は非負整数，α と β は実数) という式 (の線形結合) の場合には，**未定係数法**で求めることができる．$f(x)$ がこの形の場合，微分方程式の特解は，「$f(x)$ とその (任意の階数の) 導関数に現れる独立な関数の線形結合」の形，すなわち，それらの関数を $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ として，

$$y_p = Af_1(x) + Bf_2(x) + Cf_3(x) + \cdots$$

の形で探すと多くの場合にうまく見つかる．

例 1　$f(x) = x^2 + x$ のとき，特解は $y_p = Ax^2 + Bx + C$ の形で探す．

例 2　$f(x) = e^{-x}\sin x$ のとき，特解は $y_p = Ae^{-x}\sin x + Be^{-x}\cos x$ の形で探す．

例 3　$f(x) = x + e^{-x} + \sin x$ のとき，特解は $y_p = Ax + B + Ce^{-x} + D\sin x + E\cos x$ の形で探す．

$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$ の場合には，特解を $y_p = Ae^{-x}$ の形で探そうとしても，$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = 0$ となってうまくいかない．これは，右辺 $f(x) = e^{-x}$ が同伴方程式 $z'' + 3z' + 2z = 0$ の解だったためである．この場合，x をかけて，特解を $y_p = Axe^{-x}$ の形で探すとうまくいく．それでもうまくいかない場合は，必要なだけ x をかけていけばよい．$f(x)$ が先に述べた形をしている限り，この手続きによって必ず特解を見つけることができる．

例 4　$y'' + 2y' + y = e^{-x}$ の場合，右辺 $f(x) = e^{-x}$ は同伴方程式 $z'' + 2z' + z = 0$ の解である．さらに，xe^{-x} も同伴方程式の解なので，特解を $y_p = Ax^2e^{-x}$ の形で探す．

未定係数法の理論的な補足

微分演算子 $D \equiv \dfrac{d}{dx}$ を用いると，定数係数 2 階線形微分方程式 $y'' + ay' + by = f(x)$ は $(D^2 + aD + b)y = f(x)$ と書ける．議論は高階の微分方程式に一般化できるので，$P(t)$ を t の n 次多項式として，定数係数 n 階線形微分方程式 $P(D)y = f(x)$ を考える．ただし，$P(D)$ は多項式 $P(t)$ の t を形式的に D で置き換えた微分演算子を表す．一般解は，$P(D)y_p = f(x)$ を満たす特解 y_p と，同伴方程式 $P(D)z = 0$ の一般解 $z = \sum_{i=1}^{n} c_i z_i$ (基本解の線形結合) の和 $y = y_p + z$ で与えられる．右辺 $f(x)$ がある m 次多項式 $Q(t)$ に対して $Q(D)f(x) = 0$ を満たすとしよう．[*1] このとき，$P(D)y = f(x)$ に左から $Q(D)$ を作用させると，$Q(D)P(D)y = Q(D)f(x) = 0$ となり，これは $(n+m)$ 階の斉次方程式である．したがって，$P(D)y = f(x)$ の特解は，$Q(D)P(D)y = 0$ の $(n+m)$ 個の基本解のうち，$P(D)z = 0$ の n 個の基本解を除いたものの線形結合の形で探せばよいことがわかる．[*2]

例 5　$y'' + 3y' + 2y = (D+1)(D+2)y = xe^{-x}$ の場合，$(D+1)^2 xe^{-x} = 0$ より，$(D+1)^3(D+2)y = 0$ を満たす．$(D+1)^3(D+2)y = 0$ の基本解は $\{e^{-2x}, e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}\}$，同伴方程式 $(D+1)(D+2)z = 0$ の基本解は $\{e^{-2x}, e^{-x}\}$ であるから，特解は $y_p = Axe^{-x} + Bx^2e^{-x}$ の形で探せばよい．

[*1] ある多項式 $Q(t)$ に対して $Q(D)f(x) = 0$ を満たすような $f(x)$ は，$x^k e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ と $x^k e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ (k は非負整数，α と β は実数) という形 (の線形結合) に限られる．このことは，$Q(t)$ が実数の範囲で $(x-a)$ と (x^2+bx+c) $(b^2-4c<0)$ の (適当な数の) 積として因数分解できることから容易に示すことができる．

[*2] $P(D)z = 0$ の基本解を y_p の線形結合に含めてもよいが，無駄である．