

演習：面積分【微分積分】

番号に*印がついた問題は計算がやや複雑なので、初めは飛ばしてもよい。Gauss の発散定理を用いると簡単に計算できる問題もあるが、力試しと思って、面積分のまま計算するとよい。なお、閉曲面の面素ベクトルの向きは曲面の外向きにとり、閉曲面ではない曲面の場合には $dS_z > 0$ となるようにとるものとする。また、問題文中の定数は全て正 ($a, b, c > 0$) とする。閉曲面 S 上の面積分は $\oint_S$ と書く。

1. 平面

平面 $S = \left\{ [x, y, z] \mid \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x, y, z \geq 0 \right\}$ を考える。

(1.1) S の面積 $S(a, b, c)$ を計算せよ。

(1.2) $\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$ を計算せよ。

(1.3) $\int_S z dS$ を計算せよ。

(1.4) $\int_S (x + y + z) dS$ を計算せよ。

*(1.5) $\int_S xyz dS$ を計算せよ。

2. 球面

半径 a の球面 $S = \{[x, y, z] \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ を考える。

(2.1) S の表面積 $S(a)$ を、球面座標 (θ, ϕ) をとって計算せよ。

(2.2) S の表面積 $S(a)$ を、球面を $z = f(x, y)$ の形で表し、 x と y についての 2 重積分の形にしてから計算せよ。

(2.3) S うち $z = z_1$ と $z = z_2$ で挟まれた部分の面積 $S'(z_1, z_2)$ を求めよ。ただし、 $a \geq z_1 \geq z_2 \geq -a$ とする。

(2.4) $\oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$ を計算せよ。

(2.5) $\oint_S z \mathbf{e}_z \cdot d\mathbf{S}$ を計算せよ。

*(2.6) 定ベクトル $\mathbf{r}_0$ に対して $\oint_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \cdot d\mathbf{S}$ を計算せよ。(Hint: $\mathbf{r}_0$ の方向に z 軸をとる)

3. 楕円体面

楕円体面 $S = \left\{ [x, y, z] \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$ を考える。

(3.1) $\oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$ を計算せよ。

以下、 $a = b$ (回転楕円体) の場合を考える。

*(3.2) 回転楕円体の表面積 $S(a, c)$ を求めよ。

*(3.3) $\oint_S \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{S}$ を計算せよ。

4. その他

(4.1) 円盤 $S = \{[x, y, z] = [x, y, 0] \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ に対して、 $\int_S \frac{\mathbf{e}_z}{r} \cdot d\mathbf{S}$ を計算せよ。

(4.2) 回転放物面 $S = \{[x, y, z] \mid z = x^2 + y^2, z \leq a\}$ の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4.3) 円錐面 $S = \{[x, y, z] \mid z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq a\}$ の面積 $S(a)$ を求めよ。

演習：面積分【微分積分】解答例

1. 平面

平面 S を与える方程式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ を z について解くと、 $z = c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$ となるから、

$$z_x = -\frac{c}{a}, \quad z_y = -\frac{c}{b}.$$

したがって、面素ベクトル $d\mathbf{S}$ は、

$$d\mathbf{S} = \begin{bmatrix} c/a \\ c/b \\ 1 \end{bmatrix} dxdy = c \begin{bmatrix} 1/a \\ 1/b \\ 1/c \end{bmatrix} dxdy$$

と表すことができる。ここで、 $d\mathbf{S}$ は $dS_z > 0$ となるようにとった。

(1.1)

$$dS = |d\mathbf{S}| = c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} dxdy$$

であるから、平面 S の面積 $S(a, b, c)$ は、

$$S(a, b, c) = \int_S dS = c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \int_D dxdy = \frac{abc}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2}$$

と計算できる。^{*1} ここで、 $D = \left\{ [x, y] \mid \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1, x, y \geq 0 \right\}$ は平面 S を xy 平面に正射影した領域である。

(1.2)

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot c \begin{bmatrix} 1/a \\ 1/b \\ 1/c \end{bmatrix} dxdy = c \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right) dxdy$$

であるが、平面 S 上で $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ が成り立つから、 D を前問と同じ領域として、以下のように計算できる。

$$\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = c \int_D dxdy = \frac{abc}{2}.$$

補足 平面 S と 3 つの平面 $x = 0, y = 0, z = 0$ で囲まれた領域 (三角錐) を $V = \left\{ [x, y, z] \mid \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1, x, y, z \geq 0 \right\}$ とする。 V の表面 ∂V から平面 S を除いた面 ($\partial V - S$) 上では $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = 0$ であるから、領域 V に対して Gauss の発散定理を用いると、以下のように計算できる。

$$\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial V} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{r}) dV = 3 \int_V dV = 3 \cdot \frac{abc}{6} = \frac{abc}{2}.$$

(1.3) 平面 S 上で $z = c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$ と書けることを用いると、

$$\int_S z dS = c^2 \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \int_D dxdy \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \frac{c}{6} \sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2}.$$

(1.4) 平面 S 上で $z = c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$ と書けることを用いると、

$$\int_S z dS = c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \int_D dxdy \left[x + y + c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \right] = \frac{a+b+c}{6} \sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2}.$$

(1.5) 平面 S 上で $z = c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$ と書けることを用いると、

$$\int_S xyz dS = c^2 \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \int_D dxdy xy \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \frac{(abc)^2}{120} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}.$$

^{*1} $\int_D dxdy = \int_0^a dx \int_0^{-(b/a)x+b} dy = \int_0^a dx \left(-\frac{b}{a}x + b \right) = \frac{ab}{2}$ であるが、これは三角形の面積なので、図を描けば計算しなくてもわかる。

2. 球面

(2.1) 球面座標 (θ, ϕ) をとると、曲面 S 上の点 $\mathbf{r}$ は、

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} x(\theta, \phi) \\ y(\theta, \phi) \\ z(\theta, \phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \sin \theta \cos \phi \\ a \sin \theta \sin \phi \\ a \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (\theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]),$$

と媒介変数表示できる。媒介変数 θ と ϕ の微小変化に対する微小変位は、

$$d\mathbf{r}_\theta = \begin{bmatrix} a \cos \theta \cos \phi \\ a \cos \theta \sin \phi \\ -a \sin \theta \end{bmatrix} d\theta = a \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{bmatrix} d\theta, \quad d\mathbf{r}_\phi = \begin{bmatrix} -a \sin \theta \sin \phi \\ a \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} d\phi = a \sin \theta \begin{bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} d\phi,$$

と計算できる。したがって、面素ベクトル $d\mathbf{S}$ は、

$$d\mathbf{S} = d\mathbf{r}_\theta \times d\mathbf{r}_\phi = a^2 \sin \theta \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} d\theta d\phi = a^2 \sin \theta \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix} d\theta d\phi = a^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r$$

である。ここで、 $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/a = [\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta]$ である。 $dS = |d\mathbf{S}| = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$ であるから、

$$S(a) = \oint_S dS = a^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi a^2.$$

(2.2) 球面の方程式 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ を z について解くと、

$$z = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

となる。複号はそれぞれ上半球と下半球を表す。 $z = f(x, y)$ という形の関数 1 つだけでは球面全体を表すことができないことに注意。このとき、

$$z_x = \pm \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{z}, \quad z_y = \pm \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{y}{z},$$

となるから、面素ベクトル $d\mathbf{S}$ は、

$$d\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{bmatrix} dxdy = \begin{bmatrix} x/z \\ y/z \\ 1 \end{bmatrix} dxdy = \frac{1}{z} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} dxdy = \frac{\mathbf{r}}{z} dxdy$$

となる。球の表面積が上半球面の面積の 2 倍であることと、上半球面で

$$dS = |d\mathbf{S}| = \frac{r}{z} dxdy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy$$

であることから、球の表面積 $S(a)$ は、

$$S(a) = \oint_S dS = 2a \int_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 2a \int_0^a dr \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi a^2.$$

ただし、 $D = \{[x, y] \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ は、上半球面 (S の $z \geq 0$ の部分) を xy 平面に正射影した領域である。

(2.3) (2.1) で θ 積分の範囲を $\theta_2 = \text{Arccos}(z_2/a)$ から $\theta_1 = \text{Arccos}(z_1/a)$ までとすればよい。

$$S'(z_1, z_2) = a^2 \int_{\theta_2}^{\theta_1} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi a^2 (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = 2\pi a (z_1 - z_2).$$

補足 もちろん $S'(z_1, z_1) = 0$ と $S'(a, -a) = 4\pi a^2$ が成り立つ。

(2.4) 球面座標を用いて計算する。 $d\mathbf{S} = a^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r$ であり、球面 S 上で $\mathbf{r} = a \mathbf{e}_r$ であることを用いると、

$$\oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = a \oint_S \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S} = a^3 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi a^3.$$

補足 1 半径 a の球面の表面積 $4\pi a^2$ が既知の場合には, $d\mathbf{S} = \mathbf{e}_r dS$ から,

$$\oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_r dS = \oint_S r dS = a \oint_S dS = a \cdot 4\pi a^2 = 4\pi a^3$$

と簡単に計算することもできる.

補足 2 Gauss の発散定理を用いると,

$$\oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{r}) dV = 3 \int_V dV = 3 \cdot \frac{4\pi a^3}{3} = 4\pi a^3$$

と計算できる. ここで, $V = \{[x, y, z] \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ は, 球面 S が囲む領域 (球) である.

(2.5) 球面座標を用いる. $d\mathbf{S} = a^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r$ であり, 球面 S 上で $z\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r = a \cos^2 \theta$ であることを用いると,

$$\oint_S z\mathbf{e}_z \cdot d\mathbf{S} = a^3 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos^2 \theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

補足 $\nabla \cdot x\mathbf{e}_x = \nabla \cdot y\mathbf{e}_y = \nabla \cdot z\mathbf{e}_z = \nabla \cdot \mathbf{r}/3 = 1$ より, 前問の補足と同様に Gauss の発散定理を用いると, 一般の閉曲面 S に対して,

$$\oint_S x\mathbf{e}_x \cdot d\mathbf{S} = \oint_S y\mathbf{e}_y \cdot d\mathbf{S} = \oint_S z\mathbf{e}_z \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{3} \oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \int_V dV$$

が成り立つ. ここで, V は球面 S が囲む領域である.

(2.6) 曲面 S は球対称であるから, $\mathbf{r}_0$ の方向を z 軸にとっても一般性を失わない. このとき, $\mathbf{r}_0 = r_0 \mathbf{e}_z$ と表される. 球面 S の面素ベクトルは $d\mathbf{S} = a^2 \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r$ であるから,

$$\begin{aligned} I &= \oint_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \cdot d\mathbf{S} = a^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \mathbf{e}_r \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = a^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{a - r_0 \cos \theta}{(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \theta)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 2\pi a^2 \int_{-1}^1 d\cos \theta \frac{a - r_0 \cos \theta}{(a^2 + a_0^2 - 2ar_0 \cos \theta)^{3/2}} = 2\pi \left(1 + \frac{a - r_0}{|a - r_0|} \right) = \begin{cases} 4\pi & (a > r_0) \\ 0 & (a < r_0) \end{cases} \end{aligned}$$

となる.*2

補足 (Gauss の法則) $\mathbf{r}_0$ にある点電荷 Q が位置 $\mathbf{r}$ につくる電場は,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}$$

である (Coulomb の法則). 先に計算した積分結果を用いると, $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ を中心とする半径 a の球面 S に対して,

$$\oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0} & (a > r_0) \\ 0 & (a < r_0) \end{cases}$$

が成り立つ. これは積分形の Gauss の法則の特別な場合である.

*2 $\cos \theta \equiv t$ による定積分は以下のように計算すればよい.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dt \frac{a - r_0 t}{(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 t)^{3/2}} &= \frac{1}{2a} \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 t}} + \frac{a^2 - r_0^2}{2a} \int_{-1}^1 \frac{dt}{(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 t)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2a} \frac{1}{(-ar_0)} \left[\sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 t} \right]_{-1}^1 + \frac{a^2 - r_0^2}{2a} \frac{1}{ar_0} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 t}} \right]_{-1}^1 \\ &= -\frac{1}{2a^2 r_0} \{ |a - r_0| - (a + r_0) \} + \frac{a^2 - r_0^2}{2a^2 r_0} \left(\frac{1}{|a - r_0|} - \frac{1}{a + r_0} \right) = \frac{1}{a^2} \left(1 + \frac{a - r_0}{|a - r_0|} \right). \end{aligned}$$

3. 楕円体面

(3.1) 楕円体面 S 上の点 $\mathbf{r}$ は,

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} x(\theta, \phi) \\ y(\theta, \phi) \\ z(\theta, \phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \sin \theta \cos \phi \\ b \sin \theta \sin \phi \\ c \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (\theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]),$$

と媒介変数表示できる.*³ 媒介変数 θ と ϕ の微小変化に対する微小変位は,

$$d\mathbf{r}_\theta = \begin{bmatrix} a \cos \theta \cos \phi \\ b \cos \theta \sin \phi \\ -c \sin \theta \end{bmatrix} d\theta, \quad d\mathbf{r}_\phi = \begin{bmatrix} -a \sin \theta \sin \phi \\ b \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} d\phi = \begin{bmatrix} -a \sin \phi \\ b \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} \sin \theta d\theta,$$

となる。したがって、面素ベクトル $d\mathbf{S}$ は,

$$d\mathbf{S} = d\mathbf{r}_\theta \times d\mathbf{r}_\phi = \begin{bmatrix} a \cos \theta \cos \phi \\ b \cos \theta \sin \phi \\ -c \sin \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -a \sin \phi \\ b \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix} \sin \theta d\theta d\phi = \begin{bmatrix} bc \sin \theta \cos \phi \\ ac \sin \theta \sin \phi \\ ab \cos \theta \end{bmatrix} \sin \theta d\theta d\phi$$

と表すことができる。当然のことながら、 $a = b = c$ のときには球面の結果と一致する。このとき,

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \begin{bmatrix} a \sin \theta \cos \phi \\ b \sin \theta \sin \phi \\ c \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} bc \sin \theta \cos \phi \\ ac \sin \theta \sin \phi \\ ab \cos \theta \end{bmatrix} \sin \theta d\theta d\phi = abc \sin \theta d\theta d\phi$$

より、以下のように計算できる。

$$\oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = abc \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi abc.$$

補足 Gauss の発散定理を使うと,

$$\oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{r}) dV = 3 \int_V dV = 3 \cdot \frac{4\pi abc}{3} = 4\pi abc$$

と計算できる。ここで、 $V = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ は楕円体面 S が囲む領域 (楕円体) である。

(3.2) $b = a$ のとき,

$$dS = \left| \begin{bmatrix} ac \sin \theta \cos \phi \\ ac \sin \theta \sin \phi \\ a^2 \cos \theta \end{bmatrix} \right| \sin \theta d\theta d\phi = a \sqrt{c^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta} \sin \theta d\theta d\phi$$

より、回転楕円体の表面積は,

$$\begin{aligned} S(a, c) &= \oint_S dS = a \int_0^\pi d\theta \sin \theta \sqrt{c^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 2\pi ac \int_{-1}^1 d\cos \theta \sqrt{1 + \frac{a^2 - c^2}{c^2} \cos^2 \theta} = 2\pi ac \int_{-1}^1 dt \sqrt{1 + \frac{a^2 - c^2}{c^2} t^2} \end{aligned}$$

と表すことができる。この先の計算は、 a と c の大小によって場合分けが必要である。

(i) $a \geq c$ の場合 楕円の離心率を $e = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2}}$ で導入すると,

$$S(a, c) = 2\pi ac \int_{-1}^1 dt \sqrt{1 + \left(\frac{ea}{c}t\right)^2} = 2\pi ac \left[\sqrt{1 + \left(\frac{ea}{c}\right)^2} + \frac{c}{ea} \sinh^{-1} \left(\frac{ea}{c}\right) \right] = 2\pi \left[a^2 + \frac{c^2}{e} \tanh^{-1}(e) \right]$$

と計算できる。ここで、 $\sqrt{1 + (ea/c)^2} = a/c$ と $\sinh^{-1} x = \tanh^{-1}(x/\sqrt{1+x^2})$ を用いた。*⁴

*³ $(X, Y, Z) = (x/a, y/b, z/c)$ と変数変換すると、楕円体面は $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ と表されるので、 (X, Y, Z) は単位球面と同じ媒介変数表示ができる。 $(X, Y, Z) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ 。

*⁴ $x > 0$ のとき $y = \sinh^{-1} x$ とすると、 $\tanh y = \sqrt{\tanh^2 y} = \sqrt{\frac{\sinh^2 y}{\cosh^2 y}} = \sqrt{\frac{\sinh^2 y}{1 + \sinh^2 y}} = \sqrt{\frac{\sinh^2 y}{1 + \sinh^2 y}} = \sqrt{\frac{x^2}{1 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ より、 $y = \sinh^{-1} x = \tanh^{-1}(x/\sqrt{1+x^2})$ 。この関係式は $x \leq 0$ でも成り立つ。

(ii) $a \leq c$ の場合 楕円の離心率を $e = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{c^2}}$ で導入すると,

$$S(a, c) = 2\pi ac \int_{-1}^1 dt \sqrt{1 - (et)^2} = 2\pi ac \left[\sqrt{1 - e^2} + \frac{1}{e} \operatorname{Arcsin}(e) \right] = 2\pi \left[c^2 + \frac{ac}{e} \operatorname{Arcsin}(e) \right]$$

と計算できる. ここで, $\sqrt{1 - e^2} = c/a$ を用いた.

補足 いずれの式も, $c \rightarrow a$ の極限 (このとき $e \rightarrow +0$) で, $\lim_{c \rightarrow a} S(a, c) = 4\pi a^2$ と, 半径 a の球の表面積になる.

(3.3) $b = a$ のとき,

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta} = \sqrt{a^2 + (c^2 - a^2) \cos^2 \theta},$$

より,

$$\begin{aligned} I(a, c) &\equiv \oint_S \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{S} = a^2 c \int_{-1}^1 \frac{d \cos \theta}{\sqrt{a^2 + (c^2 - a^2) \cos^2 \theta}} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 2\pi a^2 c \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{a^2 + (c^2 - a^2)t^2}} = 2\pi ac \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{c^2 - a^2}{a^2} t^2}}. \end{aligned}$$

a と c の大小によって場合分けして計算する.

(i) $a \geq c$ の場合 楕円の離心率を $e = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2}}$ で導入すると,

$$I(a, c) = 2\pi ac \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - (et)^2}} = 2\pi ac \cdot \frac{2}{e} \operatorname{Arcsin}(e) = 4\pi ac \cdot \frac{\operatorname{Arcsin}(e)}{e}.$$

(ii) $a \leq c$ の場合 楕円の離心率を $e = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{c^2}}$ で導入すると,

$$I(a, c) = 2\pi ac \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{ea}{c}t\right)^2}} = 2\pi ac \cdot \frac{2c}{ea} \sinh^{-1}\left(\frac{ea}{c}\right) = 4\pi c^2 \cdot \frac{\tanh^{-1}(e)}{e}.$$

補足 球面の場合には $d\mathbf{S} = dS \mathbf{e}_r$ だったので $\oint_S \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S} = \oint_S dS$ となったが, 楕円体面 (やその他の一般の曲面) の場合には $d\mathbf{S} \neq dS \mathbf{e}_r$ なので, この問題の結果が示すように $\oint_S \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S} \neq \oint_S dS$ であることに注意. ただし, $c \rightarrow a$ の極限 (このとき $e \rightarrow +0$) では両者は一致し, 確かに $\lim_{c \rightarrow a} I(a, c) = 4\pi a^2$ となる.

4. その他

(4.1) 面素ベクトルは $d\mathbf{S} = dxdy \mathbf{e}_z$ と表すことができるから,^{*5}

$$\int_S \frac{\mathbf{e}_z}{r} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\mathbf{e}_z}{r} \cdot \mathbf{e}_z dxdy = \int_S \frac{dxdy}{r} = \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi a.$$

補足 この問題は, 積分結果が円盤の境界である半径 a の円 $C = \partial S$ の長さとなるように作った. 積分 $\oint_{C=\partial S} dr = 2\pi a$ との関係は, Stokes の定理 (あるいは Green の定理) を用いると理解できる.

(4.2) 放物面の方程式 $z = x^2 + y^2$ より,

$$z_x = 2x, \quad z_y = 2y,$$

だから, 面素ベクトル $d\mathbf{S}$ は,

$$d\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{bmatrix} dxdy = \begin{bmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{bmatrix} dxdy,$$

^{*5} これは計算しなくてもわかるが, 計算で示すなら次のようになる. $\mathbf{r} = [x, y, z]$ より $d\mathbf{r}_x = [1, 0, 0] dx$ と $d\mathbf{r}_y = [0, 1, 0] dy$ が得られるので, $d\mathbf{S} = d\mathbf{r}_x \times d\mathbf{r}_y = [0, 0, 1] dxdy$.

と与えられる。したがって、

$$S(a) = \int_S dS = \int_D dx dy \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} = \int_0^{\sqrt{a}} dr r \sqrt{1 + 4r^2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{6} \left[(1 + 4a)^{3/2} - 1 \right] .$$

ここで、 $D = \{[x, y] \mid x^2 + y^2 \leq a\}$ は放物面 S を xy 平面に正射影した領域である。

(4.3) 円錐面の方程式 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ より、

$$z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{z} , \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{z} ,$$

だから、面素ベクトル $d\mathbf{S}$ は、

$$d\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{bmatrix} dx dy = \begin{bmatrix} -x/z \\ -y/z \\ 1 \end{bmatrix} dx dy$$

と与えられる。したがって、

$$S(a) = \int_S dS = \int_D dx dy \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \int_0^a dr r \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{2} = \sqrt{2} \pi a^2 .$$

ここで、 $D = \{[x, y] \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ は円錐面 S を xy 平面に正射影した領域である。

別解 円錐面 S 上の点 $\mathbf{r}$ は、

$$\mathbf{r}(r, \theta) = \begin{bmatrix} x(r, \theta) \\ y(r, \theta) \\ z(r, \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ r \end{bmatrix} , \quad (r \in [0, a], \theta \in [0, 2\pi]) ,$$

と媒介変数表示できる。媒介変数 r と θ の微小変化に対する微小変位は、

$$d\mathbf{r}_r = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 1 \end{bmatrix} dr , \quad d\mathbf{r}_\theta = \begin{bmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} d\theta = r \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} d\theta ,$$

となる。したがって、面素ベクトル $d\mathbf{S}$ は、

$$d\mathbf{S} = d\mathbf{r}_r \times d\mathbf{r}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} r dr d\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 1 \end{bmatrix} r dr d\theta$$

と表すことができる。このとき、

$$dS = |d\mathbf{S}| = \sqrt{2} r dr d\theta$$

より、

$$S(a) = \int_S dS = \sqrt{2} \int_0^a dr r \int_0^{2\pi} d\theta = \sqrt{2} \pi a^2 .$$

補足 円錐の底面の半径と高さは共に a であるから、母線の長さは $\sqrt{2}a$ と表すことができる。面積 $S(a)$ は円錐の側面積であるから、 $S(a) = \pi \cdot a \cdot \sqrt{2}a = \sqrt{2} \pi a^2$ と計算できる。