演習：不定積分の計算（有理関数）【微分積分】

1.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+1}$

(2) $\displaystyle\int dx\,\frac{x}{x+1}$

(3) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^2}{x+1}$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x}$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1}$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}$

(7) $\displaystyle\int dx\,\frac{x}{x^2+1}$

(8) $\displaystyle\int dx\,\frac{x}{x^2-1}$

(9) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^2}{x^2+1}$

(10) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^2}{x^2-1}$

(11) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^3}{x^2+1}$

(12) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^3}{x^2-1}$

2.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+1}$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3x+2}$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$

(4) $\displaystyle\int dx\,\frac{x}{x^2+2x+1}$

(5) $\displaystyle\int dx\,\frac{x}{x^2+3x+2}$

(6) $\displaystyle\int dx\,\frac{x}{x^2+2x+2}$

(7) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^2}{x^2+2x+1}$

(8) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^2}{x^2+3x+2}$

(9) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^2}{x^2+2x+2}$

(10) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^3}{x^2+2x+1}$

(11) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^3}{x^2+3x+2}$

(12) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^3}{x^2+2x+2}$

3.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$

(2) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^2}{x^3+1}$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1}$

(5) $\displaystyle\int dx\,\frac{x}{x^4+1}$

(6) $\displaystyle\int dx\,\frac{x}{x^4-1}$

(7) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^3}{x^4+1}$

(8) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+2x^2+1}$

演習：不定積分の計算（有理関数）【微分積分】解答

1.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1|$

(2) $\displaystyle\int dx\,\frac{x}{x+1} = x - \ln|x+1|$

(3) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x} = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{Arctan} x$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

(7) $\displaystyle\int dx\,\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

(8) $\displaystyle\int dx\,\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln|x^2-1|$

(9) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^2}{x^2+1} = x - \operatorname{Arctan} x$

(10) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^2}{x^2-1} = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

(11) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

(12) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln|x^2-1|$

2.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+1} = -\frac{1}{x+1}$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3x+2} = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \operatorname{Arctan}(x+1)$

(4) $\displaystyle\int dx\,\frac{x}{x^2+2x+1} = \ln|x+1| + \frac{1}{x+1}$

(5) $\displaystyle\int dx\,\frac{x}{x^2+3x+2} = 2\ln|x+2| - \ln|x+1|$

(6) $\displaystyle\int dx\,\frac{x}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \operatorname{Arctan}(x+1)$

(7) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^2}{x^2+2x+1} = x - 2\ln|x+1| - \frac{1}{x+1}$

(8) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^2}{x^2+3x+2} = x + \ln|x+1| - 4\ln|x+2|$

(9) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^2}{x^2+2x+2} = x - \ln(x^2+2x+2)$

(10) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^3}{x^2+2x+1} = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3\ln|x+1| + \frac{1}{x+1}$

(11) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^3}{x^2+3x+2} = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \ln|x+1| + 8\ln|x+2|$

(12) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^3}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln(x^2+2x+2) + 2\operatorname{Arctan}(x+1)$

3.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$

(2) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^2}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln|x^3+1|$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{2}x+1\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{2}x-1\right)$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1} = -\frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

(5) $\displaystyle\int dx\,\frac{x}{x^4+1} = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x^2)$

(6) $\displaystyle\int dx\,\frac{x}{x^4-1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|$

(7) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^3}{x^4+1} = \frac{1}{4}\ln(x^4+1)$

(8) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+2x^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}$

演習：不定積分の計算（有理関数）【微分積分】詳解

有理関数の不定積分の計算手順

(i) (分子の次数) $\geq$ (分母の次数) の場合，割り算をする．

(ii) 分母を実数の範囲で因数分解する．

(iii) 部分分数分解をして，各項を積分する．(部分分数分解で現れる積分は付録 A を参照)

2.

(1) $\displaystyle \int \frac{dx}{x^2+2x+1} = \int \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1}$

(2) $\displaystyle \int \frac{dx}{x^2+3x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int dx \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) = \ln|x+1| - \ln|x+2| = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|$

(3) $\displaystyle \int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \mathrm{Arctan}(x+1)$

(4) $\displaystyle \int dx \, \frac{x}{x^2+2x+1} = \int dx \, \frac{x}{(x+1)^2} = \int dx \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) = \ln|x+1| + \frac{1}{x+1}$

(5) $\displaystyle \int dx \, \frac{x}{x^2+3x+2} = \int dx \, \frac{x}{(x+1)(x+2)} = \int dx \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right) = 2\ln|x+2| - \ln|x+1|$

(6) $\displaystyle \int dx \, \frac{x}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\int dx \, \frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2} - \int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \mathrm{Arctan}(x+1)$

(7) $\displaystyle \int dx \, \frac{x^2}{x^2+2x+1} = \int dx \left(1 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) = x - 2\ln|x+1| - \frac{1}{x+1}$

(8) $\displaystyle \int dx \, \frac{x^2}{x^2+3x+2} = \int dx \left(1 + \frac{1}{x+1} - \frac{4}{x+2}\right) = x + \ln|x+1| - 4\ln|x+2|$

(9) $\displaystyle \int dx \, \frac{x^2}{x^2+2x+2} = \int dx \left(1 - \frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2}\right) = x - \ln(x^2+2x+2)$

(10) $\displaystyle \int dx \, \frac{x^3}{x^2+2x+1} = \int dx \left(x - 2 + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3\ln|x+1| + \frac{1}{x+1}$

(11) $\displaystyle \int dx \, \frac{x^3}{x^2+3x+2} = \int dx \left(x - 3 - \frac{1}{x+1} + \frac{8}{x+2}\right) = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \ln|x+1| + 8\ln|x+2|$

(12) $$\begin{aligned}\int dx \, \frac{x^3}{x^2+2x+2} &= \int dx \left(x - 2 + \frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2} + \frac{2}{x^2+2x+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln(x^2+2x+2) + 2\,\mathrm{Arctan}(x+1)\end{aligned}$$

3.

(1)　被積分関数を部分分数分解して少し変形すると，

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{6}\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1}$$

となる．最後の項の積分は

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{dx}{(x-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

と計算できる.[1] したがって,

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) \ .$$

(2) $\displaystyle \int dx\,\frac{x^2}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int dx\,\frac{(x^3+1)'}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln|x^3+1| \ .$

(3) 被積分関数を部分分数分解すると,

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{(x^2+1)^2-2x^2} = \frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

となる.[2] 第 2 項は第 1 項の $\sqrt{2}$ を $-\sqrt{2}$ に置き換えればよいので,第 1 項のみ計算する.第 1 項は

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{(x^2+\sqrt{2}x+1)'}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

と変形でき,この第 2 項は

$$\int \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \int \frac{dx}{(x+1/\sqrt{2})^2+(1/\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}\int \frac{d(\sqrt{2}x)}{(\sqrt{2}x+1)^2+1} = \sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}x+1\right)$$

と計算できる.以上より,

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}x+1\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}x-1\right)$$

が得られる.対数はひとつにまとめた.この結果は $\sqrt{2}$ を $-\sqrt{2}$ に置き換える変換で不変である.

(4) 被積分関数を部分分数分解をすると,

$$\frac{1}{x^4-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-1}$$

となる.項別に積分して,以下のように計算できる.[3]

$$\int \frac{dx}{x^4-1} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\,x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \ .$$

(5) 被積分関数を部分分数分解すると,

$$\frac{x}{x^4+1} = \frac{x}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

となる.各々の項は分母を平方完成することで,以下のように積分できる.[4]

$$\int dx\,\frac{x}{x^4+1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}x-1\right) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}x+1\right) \ .$$

[1] この積分は置換積分をしてもよいが,$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ が積分変数になるように適当に係数を調整して,

$$\int \frac{dx}{(x-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\int \frac{dx}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}$$

と変形してやれば,公式 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \mathrm{Arctan}\,x$ をそのまま適用することができる.慣れれば暗算でできる.

[2] この式変形が思いつかなくても,分母は実数係数の多項式であるから,少なくとも 2 次式の積の形 $x^4+1=(x^2+ax+1)(x^2+bx+1)$ までは因数分解ができることがわかる.あとは係数比較して a と b を決めればよい.

[3] tanh の逆関数 artanh を用いて,$\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1} = -\frac{1}{2}\int dx\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x^2-1}\right) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\,x - \frac{1}{2}\,\mathrm{artanh}\,x$ と対称的な形にも書ける.

[4] Arctan の加法定理 $\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,y = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \pmod{\pi}$ を用いると,

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}x-1\right) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2}x+1\right) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}(x^2)$$

と書くこともできる.$\mathrm{Arctan}(1/x) = \pi/2 - \mathrm{Arctan}\,x$ を用いた.Arctan の加法定理は,tan の加法定理 $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ で $x=\tan\alpha, y=\tan\beta$ と置くことで得られる.

(5) 別解 $\displaystyle\int dx\,\frac{x}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int dx\,\frac{(x^2)'}{(x^2)^2+1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}(x^2)\ .$

(6) $\displaystyle\int dx\,\frac{x}{x^4-1} = \int dx\left(-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-1}\right) = -\frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x-1|\ .$

(6) 別解 $\displaystyle\int dx\,\frac{x}{x^4-1} = \frac{1}{2}\int dx\,\frac{(x^2)'}{(x^2)^2-1} = \frac{1}{4}\int d(x^2)\left(\frac{1}{(x^2)-1} - \frac{1}{(x^2)+1}\right) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\ .$

(7) $\displaystyle\int dx\,\frac{x^3}{x^4+1} = \frac{1}{4}\int dx\,\frac{(x^4+1)'}{x^4+1} = \frac{1}{4}\ln(x^4+1)\ .$

(8) 被積分関数は,

$$\frac{1}{x^4+2x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$$

と変形できる．第 2 項は

$$\int dx\,\frac{x^2}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\int dx\,x\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = -\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\,x$$

と積分できるから,

$$\int\frac{dx}{x^4+2x^2+1} = \int\frac{dx}{x^2+1} - \int dx\,\frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\,x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}\ .$$

(8) 別解 $x = \tan\theta$ と置換すると,

$$\int\frac{dx}{x^4+2x^2+1} = \int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int d\theta\,\cos^2\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\ .$$

ここで，$\theta = \mathrm{Arctan}\,x$ と

$$\sin\theta\cos\theta = \tan\theta\cos^2\theta = \frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1} = \frac{x}{x^2+1}$$

より,

$$\int\frac{dx}{x^4+2x^2+1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\,x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}\ .$$

付録 A：有理関数の不定積分の一般論

実係数の有理関数は，自然数 $n\ (\geq 1)$ と実定数 a, b, c, β, γ を含む以下の形の関数の線形結合として表すことができる．

$$\text{(i)}\ x^n\ , \quad \text{(ii)}\ \frac{1}{(x-a)^n}\ , \quad \text{(iii)}\ \frac{\beta x+\gamma}{(x^2+bx+c)^n} \quad (b^2-4c<0)\ .$$

つまり，実係数有理関数の不定積分は (i)-(iii) の積分に帰着する．(i) と (ii) の積分は自明である．

(iii) $x^2+bx+c=\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{4c-b^2}{4}$ より，$y=x+\dfrac{b}{2},\ A^2=\dfrac{4c-b^2}{4}\ (>0)$ と置くと，

$$\int dx\,\frac{\beta x+\gamma}{(x^2+bx+c)^n}=\beta\int dy\,\frac{y}{(y^2+A^2)^n}+\left(\gamma-\frac{b}{2}\beta\right)\int\frac{dy}{(y^2+A^2)^n}\ .$$

したがって，以下の積分が実行できればよい．

$$\text{(iii)-(a)}\ \int dx\,\frac{x}{(x^2+A^2)^n}\ , \quad \text{(iii)-(b)}\ \int\frac{dx}{(x^2+A^2)^n}\ .$$

(iii)-(a) $$\int dx\,\frac{x}{(x^2+A^2)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{(x^2+A^2)^n}=\begin{cases}-\dfrac{1}{2(n-1)(x^2+A^2)^{n-1}} & (n\geq 2)\\ \dfrac{1}{2}\ln(x^2+A^2) & (n=1)\end{cases}\ .$$

(iii)-(b) 部分積分より，

$$\begin{aligned}I_n=\int\frac{dx}{(x^2+A^2)^n}&=\int dx\,\frac{x'}{(x^2+A^2)^n}=\frac{x}{(x^2+A^2)^n}+2n\int dx\,\frac{x^2}{(x^2+A^2)^{n+1}}\\&=\frac{x}{(x^2+A^2)^n}+2n\int dx\,\frac{(x^2+A^2)-A^2}{(x^2+A^2)^{n+1}}=\frac{x}{(x^2+A^2)^n}+2n(I_n-A^2I_{n+1})\ .\end{aligned}$$

これより以下の漸化式が得られる．

$$I_{n+1}=\frac{1}{2nA^2}\left[(2n-1)I_n+\frac{x}{(x^2+A^2)^n}\right]\ .$$

初項 $I_1=\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+A^2}=\frac{1}{A}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{A}\right)$ から，I_n が順に計算できる．

有理関数の部分分数分解　互いに素な実係数の多項式 $P(x)$ と $Q(x)$ からなる有理関数 $Q(x)/P(x)$ を考える．一般性を失わずに $P(x)$ の最高次数の係数は 1 とすることができる．もし ($Q(x)$ の次数) $\geq$ ($P(x)$ の次数) であれば，ある多項式 $Q_0(x)$ と ($R(x)$ の次数) $<$ ($P(x)$ の次数) を満たす多項式 $R(x)$ を用いて

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=Q_0(x)+\frac{R(x)}{P(x)}$$

と書き直すことができる (整式の除法)．次に，分母の多項式 $P(x)$ について考える．$P(x)=0$ の根の 1 つを w とすると $P(w)=0$ が成り立つが，このとき $P(x)$ の係数が全て実数であることから，$P(w^*)=P(w)^*=0$ より，w^* も $P(x)=0$ の根である．また，w と w^* の重複度は等しい．したがって，多項式 $P(x)$ は，根が $w\in\mathbb{R}$ のときにはその重複度を m として因数 $(x-w)^m$ を，$w\notin\mathbb{R}$ のときには w の重複度を m として (w を $P(x)=0$ の m 重根として)

$$(x-w)^m(x-w^*)^m=\left[x^2-(w+w^*)x+|w|^2\right]^m=(x^2+bx+c)^m$$

という因数を含む．ここで，$b\equiv-(w+w^*)\in\mathbb{R},\ c\equiv|w|^2\in\mathbb{R}$ であり，$b^2-4c<0$ を満たす．以上から，$P(x)$ は実数の範囲で

$$P(x)=(x-a_1)^{n_1}\cdots(x-a_r)^{n_r}(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}\cdots(x^2+b_qx+c_q)^{m_q}$$

と因数分解できる．ただし，$b_i^2-4c_i<0\ (i=1,\ldots,q)$ かつ，$P(x)$ の次数を n として $\displaystyle\sum_{i=1}^{p}n_i+2\sum_{i=1}^{q}m_i=n$．したがって，$R(x)/P(x)$ を部分分数分解すると先に示した (ii) と (iii) の形の関数の線形結合で表されるから，[5] $Q(x)/P(x)$ の部分分数分解は (i)-(iii) の形の関数の線形結合で書ける．

[5] このように部分分数分解ができることは数学的帰納法で示すことができる．

付録 B：置換により有理関数の積分に帰着する形

B1. 三角関数の有理関数

$P(x,y)$ と $Q(x,y)$ を 2 変数の多項式とするとき，

$$\int dx\,\frac{Q(\cos x,\sin x)}{P(\cos x,\sin x)}$$

は $t=\tan\dfrac{x}{2}$ の置換によって有理関数の積分に帰着する．実際，この置換により，

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\ ,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}\ ,$$

となるから，

$$\int dx\,\frac{Q(\cos x,\sin x)}{P(\cos x,\sin x)}=\int dt\,\frac{2}{1+t^2}\,\frac{Q\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\dfrac{2t}{1+t^2}\right)}{P\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\dfrac{2t}{1+t^2}\right)}\ .$$

分母と分子に必要なだけ $(1+t^2)$ をかけることで，被積分関数は有理関数となる．

例題 1 [6] $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}=\int dt\,\frac{2}{1+t^2}\,\frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$

例題 2 [7] $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sin x}=\int dt\,\frac{2}{1+t^2}\,\frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{(1+t)^2}=-\frac{2}{1+t}=-\frac{2}{1+\tan\dfrac{x}{2}}$

B2. x と $\sqrt{x^2+ax+b}$ の有理関数

$\sqrt{x^2+ax+b}=t-x$ の置換により，

$$x=\frac{t^2-b}{2t+a}\ ,\quad \sqrt{x^2+ax+b}=\frac{t^2+at+b}{2t+a}\ ,\quad dx=\frac{2(t^2+at+b)}{(2t+a)^2}dt\ ,$$

となるから，x と $\sqrt{x^2+ax+b}$ の有理関数は t の有理関数になる．

例題 3 $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=\int dt\,\frac{2(t^2+1)}{(2t)^2}\,\frac{1}{\dfrac{t^2-1}{2t}\cdot\dfrac{t^2+1}{2t}}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{x+\sqrt{x^2+1}+1}\right|$

B3. x と $\sqrt[n]{x+a}$ の有理関数

$t=\sqrt[n]{x+a}=(x+a)^{1/n}$ の置換により，

$$x=t^n-a\ ,\quad dx=nt^{n-1}\,dt\ ,$$

となるから，x と $\sqrt[n]{x+a}$ の有理関数は t の有理関数になる．

例題 4 $\displaystyle\int\frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}=\int dt\,\frac{2t}{(t+1)^2}=\int dt\left(\frac{2}{t+1}-\frac{2}{(t+1)^2}\right)=2\ln|t+1|+\frac{2}{t+1}$

$$=2\ln|\sqrt{x-1}+1|+\frac{2}{\sqrt{x-1}+1}$$

---

[6] 別解 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}=\int dx\,\frac{\sin x}{\sin^2 x}=\int dx\,\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}=-\frac{1}{2}\int d(\cos x)\left(\frac{1}{1+\cos x}+\frac{1}{1-\cos x}\right)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|=\ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|$

[7] 別解 $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sin x}=\int dx\,\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}=\int dx\,\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x}=\tan x-\frac{1}{\cos x}$