

演習：数列の極限【解析学】

番号に*印がついた問題はやや難しいかあまり重要でないで、初めは飛ばしてもよい。この演習問題では、特に断りのない場合、「数」は「実数」を指すものとし、数列の添字 n は $n = 1, 2, 3, \dots$ とする。また、記号 $\forall$ を (全称記号ではなく)「任意の」という日本語の略記として用いる。たとえば、「 $\forall \epsilon > 0$ 」は「任意の正の数 ϵ 」を表す。数列の極限は ϵ - N 論法 (付録 A.1 参照) で定義する。

1. 数列の極限

(1.1) 数列 $a_n = \frac{n}{n+1}$ が 1 に収束することを示せ。

(1.2) 数列 $a_n = \frac{n^2 + n}{n^2 + 1}$ が 1 に収束することを示せ。

(1.3) 数列 $a_n = \frac{2n^2 + n}{2n^2 - 1}$ が 1 に収束することを示せ。

(1.4) 数列 $a_n = \underbrace{0.99 \cdots 9}_{n \text{ 個}}$ が 1 に収束することを示せ。

*(1.5) 数列 $a_n = (-1)^n$ が収束しないことを示せ。

2. 数列の極限と四則演算

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ のとき、以下を示せ。

(2.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (ka_n) = k\alpha$ ($k \in \mathbb{R}$ は任意の定数)

(2.2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$

(2.3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \alpha \beta$

(2.4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ ($\beta \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $b_n \neq 0$)

3. 数列の極限についての諸定理

(3.1) $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n \leq c_n$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ を示せ。(はさみうちの定理)

*(3.2) $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ のとき、 $\alpha \leq \beta$ を示せ。

(3.3) 収束する数列は有界であることを示せ。

*(3.4) 有界な単調増加数列は収束することを示せ。ただし、上に有界な集合に上限が存在することは仮定してよい。

4. 発展問題

以下の問題では、有界な単調数列が収束することを用いてよい。

(4.1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ のとき、 a_n の第 n 項までの平均値 $A_n \equiv \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ も α に収束することを示せ。

(4.2) 数列 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ が収束することを示せ。

*(4.3) 数列 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ が収束することを示せ。

(4.4) $a > 0$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$ を示せ。(類題: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ を示せ)

(4.5) 初項 $a_1 = 1$ と漸化式 $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ で定まる数列 a_n の極限が存在することを示し、極限値を求めよ。

(4.6) 初項 $a_1 = 2$ と漸化式 $a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}$ で定まる数列 a_n の極限が存在することを示し、極限値を求めよ。

*(4.7) 初項 $a_1 = 1$ と漸化式 $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$ で定まる数列 a_n の極限が存在することを示し、極限値を求めよ。

*(4.8) 初項 $a_1 = 1$ と漸化式 $a_{n+1} = \frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}$ で定まる数列 a_n の極限が存在することを示し、極限値を求めよ。

*(4.9) $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して数列 $a_n = \frac{x^n}{n!}$ を定めたとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を示せ。

演習：数列の極限【解析学】解答例

1. 数列の極限

一般項が具体的に与えられた数列 a_n が α に収束することの証明は、以下のテンプレートに従って書けばよい。

証明のテンプレート

$\forall \epsilon > 0$ に対して、 $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ を (i) N_ϵ の提示 と選ぶと、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$n \geq N_\epsilon \implies |a_n - \alpha| = \text{(ii) 不等式の証明} < \epsilon$$

が成り立つので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ である。

(1.1) $\forall \epsilon > 0$ に対して、 $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ を $(1/\epsilon - 1)$ より大きく選ぶと、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$n \geq N_\epsilon \implies |a_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N_\epsilon + 1} < \frac{1}{(1/\epsilon - 1) + 1} = \epsilon$$

が成り立つので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ である。

補足 N_ϵ は大きめに選んでおけばよいので、「 $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ を $1/\epsilon$ より大きく選ぶと」として、

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N_\epsilon + 1} < \frac{1}{1/\epsilon + 1} < \frac{1}{1/\epsilon} = \epsilon$$

と書いてもよい。もちろん、あまり意味はないが、「 $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ を $10/\epsilon$ より大きく選ぶと」でもよい。また、 N_ϵ を ϵ の関数として具体的に与えたければ、 x 以上の最小の整数を与える天井関数 $\lceil x \rceil$ を用いて、 $N_\epsilon = \lceil 1/\epsilon \rceil$ などと書くこともできる。 x 以下の最大の整数を与える床関数 $\lfloor x \rfloor$ や Gauss 記号 $[x]$ を使って、 $N_\epsilon = \lfloor 1/\epsilon + 1 \rfloor = [1/\epsilon + 1]$ と書くこともできる。 ϵ は実数、 N_ϵ は自然数なので、「 $N_\epsilon = 1/\epsilon$ 」などとは書けないことに注意。

(1.2) $\forall \epsilon > 0$ に対して、 $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ を $1/\epsilon$ より大きく選ぶと、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$n \geq N_\epsilon \implies |a_n - 1| = \left| \frac{n^2 + n}{n^2 + 1} - 1 \right| = \frac{n-1}{n^2+1} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\epsilon} < \frac{1}{1/\epsilon} = \epsilon$$

が成り立つので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ である。

補足 N_ϵ は大きめに選んでおけばよいので、以下の不等式を n について無理に解く必要はない。

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n^2 + n}{n^2 + 1} - 1 \right| = \frac{n-1}{n^2+1} < \epsilon.$$

(1.3) $\forall \epsilon > 0$ に対して、 $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ を $2/\epsilon$ より大きく選ぶと、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$n \geq N_\epsilon \implies |a_n - 1| = \left| \frac{2n^2 + n}{2n^2 - 1} - 1 \right| = \frac{n+1}{2n^2-1} \leq \frac{n+n}{2n^2-n^2} = \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \leq \frac{2}{N_\epsilon} < \frac{2}{2/\epsilon} = \epsilon$$

が成り立つので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ である。

別解 $\forall \epsilon > 0$ に対して、 $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ を $(1/2\epsilon + 1)$ より大きく選ぶと、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\begin{aligned} n \geq N_\epsilon \implies |a_n - 1| &= \left| \frac{2n^2 + n}{2n^2 - 1} - 1 \right| = \frac{n+1}{2n^2-1} < \frac{n+1}{2n^2-2} = \frac{n+1}{2(n+1)(n-1)} \\ &= \frac{1}{2(n-1)} \leq \frac{1}{2(N_\epsilon-1)} < \frac{1}{2 \cdot 1/2\epsilon} = \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ である。

^{*1} 式変形の途中で分母に $(n-1)$ が現れるが、 $N_\epsilon > (1/2\epsilon + 1) > 1$ より $n \geq N_\epsilon \geq 2$ なので問題ない。初めの有限個の項は収束性に関係がないので、もし問題があれば除いて考えればよい。 $\frac{n+1}{2n^2-1} < \frac{2(n+1)}{2n^2-2} = \frac{1}{n-1}$ と評価して、 $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ を $(1/\epsilon + 1)$ より大きく選んだほうが見栄えが良いかもしれないが、好みの問題なので好きにすればよい。

(1.4) $a_n = \underbrace{0.99\cdots 9}_{n \text{ 個}} = 1 - 10^{-n}$ と書けることに注意する. $\forall \epsilon > 0$ に対して, $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ を $\log_{10}(1/\epsilon)$ より大きく選ぶと, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N_\epsilon \implies |a_n - 1| = |(1 - 10^{-n}) - 1| = 10^{-n} = \frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{10^{N_\epsilon}} < \frac{1}{1/\epsilon} = \epsilon$$

が成り立つので, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ である.

(1.5) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ をとる. $\alpha \geq 0$ のとき, $\forall N_\epsilon \in \mathbb{N}$ に対して, $n = 2N_\epsilon + 1 > N_\epsilon$ とすると,

$$|a_n - \alpha| = |a_{2N_\epsilon+1} - \alpha| = |(-1)^{2N_\epsilon+1} - \alpha| = |-1 - \alpha| = 1 + \alpha > 0$$

となるので, a_n は $\alpha (\geq 0)$ に収束しない. $\alpha < 0$ のとき, $\forall N_\epsilon \in \mathbb{N}$ に対して, $n = 2N_\epsilon > N_\epsilon$ とすると,

$$|a_n - \alpha| = |a_{2N_\epsilon} - \alpha| = |(-1)^{2N_\epsilon} - \alpha| = |1 - \alpha| = 1 + |\alpha| > 0$$

となるので, a_n は $\alpha (< 0)$ に収束しない. 以上より, a_n はどんな $\alpha \in \mathbb{R}$ にも収束しない.

補足 数列が収束しないことの ϵ - N 論法による表現は, 付録 A.2 を参照.

別解 $\forall N_\epsilon \in \mathbb{N}$ に対して, $n = 2N_\epsilon + 1 > N_\epsilon$ とすると,

$$|a_n - 1| = |a_{2N_\epsilon+1} - 1| = |(-1)^{2N_\epsilon+1} - 1| = |-1 - 1| = 2 > 0$$

となるので, a_n は 1 に収束しない. $\forall \alpha (\neq 1)$ をとる. $\forall N_\epsilon \in \mathbb{N}$ に対して, $n = 2N_\epsilon > N_\epsilon$ とすると,

$$|a_n - \alpha| = |a_{2N_\epsilon} - \alpha| = |(-1)^{2N_\epsilon} - \alpha| = |1 - \alpha| > 0$$

となるので, a_n は $\alpha (\neq 1)$ に収束しない. 以上より, a_n はどんな $\alpha \in \mathbb{R}$ にも収束しない.

2. 数列の極限と四則演算

(2.1) $k = 0$ のときは自明なので, $k \neq 0$ の場合を示す. $\forall \epsilon > 0$ をとる. 仮定 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ より, ある $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N_\epsilon \implies |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{|k|}$$

が成り立つ. このとき, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N_\epsilon \implies |ka_n - k\alpha| = |k(a_n - \alpha)| = |k| \cdot |a_n - \alpha| < |k| \cdot \frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon$$

が成り立つので, $\lim_{n \rightarrow \infty} (ka_n) = k\alpha$ である.

補足 $|a_n - \alpha| < \epsilon/|k|$ ではなく $|a_n - \alpha| < \epsilon/(|k| + 1)$ としておけば, $k = 0$ の場合も同時に議論できる.

(2.2) $\forall \epsilon > 0$ をとる. 仮定 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ より, ある $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在し, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N_1 \implies |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2},$$

$$n \geq N_2 \implies |b_n - \beta| < \frac{\epsilon}{2},$$

が成り立つ.*2 このとき, $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ を N_1 と N_2 より大きく選べば, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} n \geq N_\epsilon \implies |(a_n \pm b_n) - (\alpha \pm \beta)| &= |(a_n - \alpha) \pm (b_n - \beta)| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \quad (\text{三角不等式}) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つので, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ である.

*2 $\epsilon/2$ は適当に選んだ. ϵ_1 と ϵ_2 を $\epsilon_1 + \epsilon_2 \leq \epsilon$ を満たすように選び, $|a_n - \alpha| < \epsilon_1$ と $|b_n - \beta| < \epsilon_2$ としておけばよい.

(2.3) $\forall \epsilon > 0$ をとる. 仮定 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ より, ある $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在し, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} n \geq N_1 &\implies |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|}, \\ n \geq N_2 &\implies |b_n - \beta| < \frac{\epsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|} \quad \text{かつ} \quad |b_n - \beta| < 1, \end{aligned}$$

が成り立つ. このとき, $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ を N_1 と N_2 より大きく選べば, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} n \geq N_\epsilon &\implies |a_n b_n - \alpha \beta| = |(a_n - \alpha)(b_n - \beta) + \alpha(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha)| \\ &\leq |a_n - \alpha| \cdot |b_n - \beta| + |\alpha| \cdot |b_n - \beta| + |\beta| \cdot |a_n - \alpha| \quad (\text{三角不等式}) \\ &< \frac{\epsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|} \cdot 1 + |\alpha| \cdot \frac{\epsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|} + |\beta| \cdot \frac{\epsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つので, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \alpha \beta$ である.

補足 (考え方) ϵ - N 論法による証明のこころは, 「 $|a_n - \alpha|$ と $|b_n - \beta|$ がいくらでも小さくできるとき, $|a_n b_n - \alpha \beta|$ もいくらでも小さくできること」を示すことなので,

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \alpha \beta| &= |(a_n - \alpha)(b_n - \beta) + \alpha(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha)| \\ &\leq |a_n - \alpha| \cdot |b_n - \beta| + |\alpha| \cdot |b_n - \beta| + |\beta| \cdot |a_n - \alpha| \end{aligned}$$

という式変形ができた時点で, 証明の大部分が終わっている. 証明の残りの部分は, 不等式をきれいに ϵ で押さえるための装飾にすぎない. はじめに $|a_n - \alpha| < \epsilon_1$ と $|b_n - \beta| < \epsilon_2$ のように押さえたすると,

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \alpha \beta| &\leq |a_n - \alpha| \cdot |b_n - \beta| + |\alpha| \cdot |b_n - \beta| + |\beta| \cdot |a_n - \alpha| \\ &< \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 + |\alpha| \cdot \epsilon_2 + |\beta| \cdot \epsilon_1. \end{aligned}$$

したがって, $\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 + |\alpha| \cdot \epsilon_2 + |\beta| \cdot \epsilon_1 \leq \epsilon$ となるように ϵ_1 と ϵ_2 を選んでおけばよい.

別解 $\forall \epsilon > 0$ をとる. 仮定 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ より, ある $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在し, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} n \geq N_1 &\implies |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|}, \\ n \geq N_2 &\implies |b_n - \beta| < \frac{\epsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|} \quad \text{かつ} \quad |b_n - \beta| < 1, \end{aligned}$$

が成り立つ. まず, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N_2$ のとき,

$$|b_n| = |\beta + (b_n - \beta)| \leq |\beta| + |b_n - \beta| < |\beta| + 1$$

であることに注意する.*3 ここで, $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ を N_1 と N_2 より大きく選べば, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} n \geq N_\epsilon &\implies |a_n b_n - \alpha \beta| = |(a_n - \alpha)b_n + \alpha(b_n - \beta)| \\ &\leq |a_n - \alpha| \cdot |b_n| + |\alpha| \cdot |b_n - \beta| \quad (\text{三角不等式}) \\ &< \frac{\epsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|} \cdot (|\beta| + 1) + |\alpha| \cdot \frac{\epsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つので, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \alpha \beta$ である.

(2.4) $\forall \epsilon > 0$ をとる. 仮定 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ より, ある $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ が存在し, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} n \geq N_1 &\implies |a_n - \alpha| < \frac{|\beta|^2}{2} \cdot \frac{\epsilon}{|\alpha| + |\beta|}, \\ n \geq N_2 &\implies |b_n - \beta| < \frac{|\beta|^2}{2} \cdot \frac{\epsilon}{|\alpha| + |\beta|} \quad \text{かつ} \quad |b_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2}, \end{aligned}$$

*3 収束する数列の有界性 (3.3) を先に示しておけば, 適当な実数 M を用いて $|b_n| \leq M$ とできる. このとき, $|a_n - \alpha|$ と $|b_n - \beta|$ のいずれも $\epsilon/(|\alpha| + M)$ で押さえておけばよい.

が成り立つ。まず、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、 $n \geq N_2$ のとき、

$$|b_n| = |\beta + (b_n - \beta)| \geq |\beta| - |b_n - \beta| > |\beta| - \frac{|\beta|}{2} = \frac{|\beta|}{2} (> 0), \quad \therefore \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|\beta|},$$

であることに注意する。^{*4} ここで、 $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ を N_1 と N_2 より大きく選べば、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\begin{aligned} n \geq N_\epsilon &\implies \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{\alpha}{\beta} \right| = \left| \frac{\beta(a_n - \alpha) - \alpha(b_n - \beta)}{b_n \beta} \right| \\ &\leq \frac{|\beta| \cdot |a_n - \alpha| + |\alpha| \cdot |b_n - \beta|}{|b_n| \cdot |\beta|} \quad (\text{三角不等式}) \\ &< \frac{2}{|\beta|^2} \left(|\beta| \cdot \frac{|\beta|^2}{2} \cdot \frac{\epsilon}{|\alpha| + |\beta|} + |\alpha| \cdot \frac{|\beta|^2}{2} \cdot \frac{\epsilon}{|\alpha| + |\beta|} \right) \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ である。

別解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$ を示せば、(2.3) で示した $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \alpha \beta$ と合わせて、以下のように示すことができる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n} \right) = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

以下、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$ を示す。 $\forall \epsilon > 0$ をとる。仮定 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ より、ある $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$n \geq N_\epsilon \implies |b_n - \beta| < \frac{|\beta|^2}{2} \epsilon \quad \text{かつ} \quad |b_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2},$$

が成り立つ。まず、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、 $n \geq N_\epsilon$ のとき、

$$|b_n| = |\beta + (b_n - \beta)| \geq |\beta| - |b_n - \beta| > |\beta| - \frac{|\beta|}{2} = \frac{|\beta|}{2} (> 0), \quad \therefore \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|\beta|},$$

であることに注意する。このとき、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$n \geq N_\epsilon \implies \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta} \right| = \left| \frac{b_n - \beta}{b_n \beta} \right| = \frac{|b_n - \beta|}{|b_n| \cdot |\beta|} < \frac{2}{|\beta|^2} \cdot \frac{|\beta|^2}{2} \epsilon = \epsilon$$

が成り立つので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$ である。

補足 (2.1) から (2.4) で示した結果は、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (k a_n) &= k \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \end{aligned}$$

と書くこともでき、収束する数列に対しては、極限操作と四則演算が自由に交換できることを示している。これを用いると、たとえば、(1.2) は以下のように示すことができる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 1/n}{1 + 1/n^2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^2} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1.$$

^{*4} 三角不等式 $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ の左側の不等式を用いた。

3. 数列の極限についての諸定理

注意 (解答例の書き方について) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ のとき, $\forall \epsilon_1 > 0$ に対してある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在し, また $\epsilon_2 > 0$ に対してある $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在し, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} n \geq N_1 &\implies |a_n - \alpha| < \epsilon_1, \\ n \geq N_2 &\implies |b_n - \beta| < \epsilon_2, \end{aligned}$$

が成り立つ. $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ を N_1 と N_2 より大きく選べば, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N_\epsilon \implies |a_n - \alpha| < \epsilon_1, \quad |b_n - \beta| < \epsilon_2,$$

が成り立つ. このように, N_ϵ を十分に大きく選ぶことで, a_n と b_n についての不等式を両立させることができる. したがって, 以下の解答例では, 複数の数列の極限の存在を仮定する場合, そのような操作を既に行ったとして,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ のとき, $\forall \epsilon_{1,2} > 0$ に対して, ある $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N_\epsilon \implies |a_n - \alpha| < \epsilon_1, \quad |b_n - \beta| < \epsilon_2,$$

が成り立つ.」のように書く.

(3.1) $\forall \epsilon > 0$ をとる. 仮定 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$ より, ある $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N_\epsilon \implies |a_n - \alpha| < \epsilon, \quad |c_n - \alpha| < \epsilon,$$

が成り立つ. 不等式は

$$\alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon, \quad \alpha - \epsilon < c_n < \alpha + \epsilon,$$

と書き直すことができる. ここで, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n \leq c_n$ という仮定から, $n \geq N_\epsilon$ のとき

$$\alpha - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \alpha + \epsilon, \quad \therefore |b_n - \alpha| < \epsilon$$

と評価できる. したがって, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N_\epsilon \implies |b_n - \alpha| < \epsilon$$

が成り立つので, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ である.

補足 この定理は「はさみうちの原理」と呼ばれることが多いが, 証明可能な定理なので, 「はさみうちの定理」とした.

(3.2) $\alpha > \beta$ として, 背理法で示す. 仮定 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ より, ある $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N_\epsilon \implies |a_n - \alpha| < \frac{|\alpha - \beta|}{2}, \quad |b_n - \beta| < \frac{|\alpha - \beta|}{2},$$

が成り立つ. 不等式は a_n と b_n について

$$\begin{aligned} \alpha - \frac{|\alpha - \beta|}{2} &< a_n < \alpha + \frac{|\alpha - \beta|}{2}, \\ \beta - \frac{|\alpha - \beta|}{2} &< b_n < \beta + \frac{|\alpha - \beta|}{2}, \end{aligned}$$

と解けるから, これらを組み合わせて

$$(\alpha - \beta) - |\alpha - \beta| < a_n - b_n < (\alpha - \beta) + |\alpha - \beta|$$

を得る. 背理法の仮定より $\alpha - \beta > 0$ であるから, $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$ であり, この不等式は,

$$0 < a_n - b_n < 2(\alpha - \beta)$$

と書ける. これより $n \geq N_\epsilon$ を満たすような n に対して $a_n - b_n > 0$, すなわち $a_n > b_n$ となるが, これは $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n$ であるという仮定と矛盾する. したがって, $\alpha \leq \beta$ である.

別解 (考え方) $c_n \equiv b_n - a_n$ を定義すると、仮定より $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $c_n \geq 0$ である。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \gamma$ とすると、(3.2) で示した結果 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ より、

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \beta - \alpha$$

である。したがって、 $\alpha \leq \beta$ 、すなわち $\beta - \alpha \geq 0$ を示すためには、「 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $c_n \geq 0$ であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \gamma$ のとき、 $\gamma \geq 0$ 」を示せばよい。

補足 この結果を用いて「はさみうちの定理」を示すことができるが、「はさみうちの定理」を単独で示すほうが簡単。

(3.3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ とする。仮定より、ある $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$n \geq N_\epsilon \implies |a_n - \alpha| < 1$$

が成り立つ。^{*5} 不等式は

$$\alpha - 1 < a_n < \alpha + 1$$

と書き直すことができる。したがって、 $(N_\epsilon + 1)$ 個 (有限個) の数

$$|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_\epsilon-1}|, |\alpha - 1|, |\alpha + 1|$$

の最大値を M とすると、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$ となるから、数列 a_n は有界である。

注意 数列 a_n が有界であるとは、数列 a_n の全ての項からなる集合 $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が有界であることを言う。

(3.4) 数列 a_n を有界な単調増加数列とする。数列 a_n の全ての項からなる集合 $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は (上に) 有界であるから、上限

$$\alpha = \sup A$$

が存在する。数列 a_n が α に収束することを示す。 α は A の上限 (最小上界) であるから、 $\forall \epsilon > 0$ に対して、 $\alpha - \epsilon$ は集合 A の上界ではなく、

$$\alpha - \epsilon < a_{N_\epsilon}$$

となる $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在する。 a_n は単調増加であるから、 $n \geq N_\epsilon$ ならば $\alpha - \epsilon < a_n$ が成り立つ。また、 α は A の上限であるから、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、 $a_n \leq \alpha (< \alpha + \epsilon)$ である。つまり、 $n \geq N_\epsilon$ ならば $\alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon$ 、すなわち $|a_n - \alpha| < \epsilon$ となる。したがって、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$n \geq N_\epsilon \implies |a_n - \alpha| < \epsilon$$

が成り立つので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ である。

補足 a_n が有界な単調減少数列の場合も同様に議論でき、数列 a_n は下限 $\inf A$ に収束する。

補足 (実数の連続性) この問題では、「上に有界な集合に上限が存在すること」 (上限性質) を公理として採用し、「上に有界な単調増加数列が収束すること」を示したことになるが、逆に、「上に有界な単調増加数列が収束すること」を公理として「上に有界な集合に上限が存在すること」を示すこともできる。つまり、両者は同値であり、どちらを公理として採用してもよい。これらは「実数の連続性」の公理 (実数の定義) の同値な言い換えであり、他にも「Dedekind の切断公理」や「区間縮小法の原理」などが、「実数の連続性」の同値な言い換えとして知られている。

4. 発展問題

(4.1) $\forall \epsilon > 0$ をとる。仮定 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ より、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$$

^{*5} 不等式 $|a_n - \alpha| < 1$ の右辺は何でもよい。

が成り立つ。ここで、

$$|a_1 - \alpha|, |a_2 - \alpha|, \dots, |a_{N-1} - \alpha|$$

の最大値を M とすると、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、 $n \geq N$ のとき、

$$\begin{aligned} |A_n - \alpha| &= \left| \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - \alpha \right| \\ &= \frac{1}{n} |(a_1 - \alpha) + (a_2 - \alpha) + \dots + (a_n - \alpha)| \\ &\leq \frac{1}{n} (|a_1 - \alpha| + |a_2 - \alpha| + \dots + |a_{N-1} - \alpha|) + \frac{1}{n} (|a_N - \alpha| + \dots + |a_n - \alpha|) \quad (\text{三角不等式}) \\ &< \frac{1}{n} \cdot (N-1) \cdot M + \frac{1}{n} \cdot [n - (N-1)] \cdot \frac{\epsilon}{2} \\ &< \frac{NM}{n} + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

と評価できる。したがって、 $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ を N と $2NM/\epsilon$ よりも大きく選べば、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$n \geq N_\epsilon \implies |A_n - \alpha| < \frac{NM}{n} + \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{NM}{N_\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

が成り立つから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \alpha$ である。

補足 この逆「数列 a_n の第 n 項までの平均値が α に収束すれば、 a_n も α に収束する」は成り立たないので注意。簡単な反例として $a_n = (-1)^n$ が挙げられる。

(4.2) a_n を二項展開すると、

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\prod_{m=0}^{k-1} (n-m) \right) \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{m=0}^{k-1} \left(1 - \frac{m}{n}\right)$$

となる。展開の各項は正で、 n が $n+1$ に変わると、 $\left(1 - \frac{m}{n}\right)$ の部分が $\left(1 - \frac{m}{n+1}\right)$ に変わるため ($k \geq 2$ の) 各項が大きくなることに加え、項数が1つ増える。^{*6} したがって、 $a_n < a_{n+1}$ であり、数列 a_n は単調増加である。また、 $k \geq 1$ に対して $k! \geq 2^{k-1}$ であることを用いると、^{*7}

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{m=0}^{k-1} \left(1 - \frac{m}{n}\right) < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3$$

と評価でき、数列 a_n は上に有界である。以上から、数列 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ は有界な単調増加数列であるから収束する。

補足 もちろん $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.718281828\dots$ は Napier 数 (自然対数の底) である。

別解 (a_n が単調増加であることの証明 1) a_n と a_{n+1} は以下のように二項展開できる。

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}, \\ a_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

^{*6} わかりづらければ、以下のように書き下せばよい。

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(n-1)]}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

^{*7} $0! = 1$ であるから $k=0$ でも $k! \geq 2^{k-1}$ が成り立つが、以下のように a_n に対する制限が少し弱くなってしまふ。

$$a_n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 4 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < 4.$$

ここで、 a_{n+1} と a_n の二項展開の各項の差は

$$\binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n+1-k) \cdot n^k (n+1)^{k-1}} [n^k - (n+1)^{k-1} (n+1-k)]$$

と書けるが、 $(k-1)$ 個の $(n+1)$ と 1 個の $(n+1-k)$ に相加相乗平均の関係を用いることで、

$$[(n+1)^{k-1} (n+1-k)]^{1/k} \leq \frac{(k-1)(n+1) + (n+1-k)}{k} = n, \quad \therefore (n+1)^{k-1} (n+1-k) \leq n^k,$$

と評価できる。さらに、 a_{n+1} は a_n よりも項数が 1 つ多いので、 $a_{n+1} > a_n$ である。

別解 (a_n が単調増加であることの証明 2) a_n と a_{n+1} の比は

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

と書けるが、 n 個の $(n+1)/n$ と 1 個の 1 に相加相乗平均の関係を用いることで、

$$\frac{n \cdot (n+1)/n + 1 \cdot 1}{n+1} \geq \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot 1\right]^{1/(n+1)}, \quad \therefore \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \geq 1,$$

と評価できる。ここで、 $(n+1)/n \neq 1$ より等号は成立しないので、 $a_{n+1} > a_n$ である。

(4.3) グラフを描けば容易にわかるように、 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x}$ であるから、

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} - \ln n = \ln(n+1) - \ln n > 0.$$

したがって、 a_n は下に有界である。また、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n\right) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n \\ &= \frac{1}{n+1} - \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} + \int_1^n \frac{dx}{x} = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} < 0 \end{aligned}$$

より、^{*8} a_n は単調減少数列である。以上より、 a_n は下に有界な単調減少数列であるから収束する。

補足 $\gamma \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n\right) = 0.5772156649 \dots$ は Euler の定数 (あるいは Euler–Mascheroni 定数) と呼ばれている。Euler の定数 γ が無理数か否かは未解決問題である。

補足 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) より、調和級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ は正の無限大に発散する。^{*9}

(4.4) $a = 1$ のときは $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ である。 $a > 1$ のときは、 $a^{1/n} > 1$ であるから、^{*10} $a^{1/n} = 1 + h_n$ と書くと、 $h_n > 0$ である。ここで、二項展開を用いると、

$$a = (a^{1/n})^n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (h_n)^k > nh_n, \quad \therefore 0 < h_n < \frac{a}{n},$$

と評価でき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0$ であるから、はさみうちの定理より $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ となる。したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + h_n) = 1 + 0 = 1$$

を得る。 $0 < a < 1$ のときは、 $1/a > 1$ であり、同様の議論で $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/a)^{1/n} = 1$ となるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1/a)^{1/n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

^{*8} $f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln x$ の増減を調べて $f(x) < 0$ ($x > 0$) を評価してもよい。

^{*9} 「任意の $M > 0$ に対して、ある $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、 $n \geq N_\epsilon \implies a_n > M$ 」が成り立つとき、数列 a_n は正の無限大に発散すると定義する。

^{*10} $a^{1/n} \leq 1$ とすると両辺を n 乗して $a \leq 1$ となり $a > 1$ と矛盾。

類題： $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ を示せ $n \geq 2$ のとき $n^{1/n} > 1$ より $n^{1/n} = 1 + h_n$ とおくと $h_n > 0$ である。ここで、

$$n = (n^{1/n})^n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k}(h_n)^k > \frac{n(n-1)}{2}h_n^2, \quad \therefore 0 < h_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

と評価でき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$ であるから、はさみうちの定理より $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ となる。したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + h_n) = 1 + 0 = 1.$$

(4.5) 数列の定義より $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n > 0$ であることは明らかなので、数列 a_n は下に有界である。さらに、相加平均と相乗平均の関係より

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2}$$

と評価できる。ここで、

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) - a_n = \frac{2 - a_n^2}{2a_n} \leq 0 \quad (\because a_n \geq \sqrt{2})$$

であるから、数列 a_n は単調減少である。したがって、数列 a_n は下に有界かつ単調減少であるから収束する。極限値を $\alpha (\geq \sqrt{2})$ として、漸化式の $n \rightarrow \infty$ の極限をとると、

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{2}{\alpha} \right), \quad \therefore \alpha = \sqrt{2}.$$

別解 数列の定義より $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n > 0$ であることは明らかであり、

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) - \sqrt{2} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} \geq 0.$$

また、

$$(0 \leq) a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} \leq \frac{a_n - \sqrt{2}}{2} \leq \frac{a_{n-1} - \sqrt{2}}{2^2} \leq \dots \leq \frac{a_1 - \sqrt{2}}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

であるから、^{*11} はさみうちの定理より $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - \sqrt{2}) = 0$ 。したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \sqrt{2}$ 。

(4.6) 数列の定義より $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \geq 0$ であることは明らかなので、数列 a_n は下に有界である。また、

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2a_n - 1) - a_n^2 = -(a_n - 1)^2 \leq 0$$

より、数列 a_n は単調減少である。したがって、数列 a_n は下に有界かつ単調減少であるから収束する。数列 a_n の極限値を $\alpha (\geq 0)$ として、漸化式の $n \rightarrow \infty$ の極限をとると、

$$\alpha = \sqrt{2\alpha - 1}, \quad \therefore \alpha = 1.$$

(4.7) 漸化式の a_n と a_{n+1} を共に α で置き換えた方程式 $\alpha = \sqrt{\alpha + 1}$ を解くと、

$$\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

が得られるから、数列が収束するならば、その極限値は α である。以下、数列 a_n が上に有界かつ単調増加であることを示す。数列の定義より $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n > 0$ であることは明らかである。

$$\alpha^2 - a_{n+1}^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 - (a_n + 1) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) - a_n = \alpha - a_n$$

より、 $\alpha - a_n > 0$ であれば $\alpha - a_{n+1} > 0$ である。ここで、 $\alpha - a_1 = (1 + \sqrt{5})/2 - 1 = (\sqrt{5} - 1)/2 > 0$ であるから、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha - a_n > 0$ 、すなわち $a_n < \alpha$ であり、数列 a_n は上に有界である。また、

$$\alpha - a_n = \alpha^2 - a_{n+1}^2 = (\alpha + a_{n+1})(\alpha - a_{n+1}) > \alpha - a_{n+1} (> 0)$$

より、 $a_{n+1} > a_n$ であるから、数列 a_n は単調増加である。したがって、数列 a_n は上に有界かつ単調増加であるから収束し、その極限値は $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ である。

^{*11} 不等式を繰り返し用いるところ ($\dots$ のところ) では、数列の番号と 2 のべきの和が $n+1$ で一定であることに着目するとよい。

補足 数列の有界性と単調性を示すために極限值 $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ を用いると見通しが良いので、前問と異なり先に α を求めた。「収束を仮定して、収束を示す」ような循環論法にはなっていないので、解答としては問題ない。

別解 数列の定義より $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n > 0$ であることは明らか。 $a_1 = 1 < 2$ であり、もし $a_k < 2$ ならば

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k + 1} \leq \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3} < 2$$

であるから、数学的帰納法により $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n < 2$ であり、^{*12} 数列 a_n は上に有界である。また、

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n + 1} - \sqrt{a_{n-1} + 1} = \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{a_n + 1} + \sqrt{a_{n-1} + 1}}$$

であり、 $a_2 - a_1 = \sqrt{2} - 1 > 0$ であるから、数学的帰納法により $a_{n+1} > a_n$ 。したがって、数列 a_n は上に有界かつ単調増加であるから収束し、その極限值 $\alpha (\geq 0)$ は漸化式の $n \rightarrow \infty$ の極限をとった方程式 $\alpha = \sqrt{\alpha + 1}$ を解いて、 $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ 。

(4.8) 数列の定義より $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n > 0$ であることは明らかである。

$$a_{n+1} = \frac{3a_n + 4}{2a_n + 3} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2(2a_n + 3)} < \frac{3}{2}$$

より、数列 a_n は上に有界である。また、

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3a_n + 4}{2a_n + 3} - \frac{3a_{n-1} + 4}{2a_{n-1} + 3} = \frac{a_n - a_{n-1}}{(2a_n + 3)(2a_{n-1} + 3)}$$

より、 $a_n - a_{n-1} > 0$ であれば $a_{n+1} - a_n > 0$ 、すなわち $a_{n+1} > a_n$ である。ここで、 $a_2 - a_1 = 7/5 - 1 = 2/5 > 0$ であるから、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_{n+1} > a_n$ であり、数列 a_n は単調増加である。したがって、数列 a_n は上に有界かつ単調増加であるから収束する。極限値を $\alpha (> 0)$ として、漸化式の $n \rightarrow \infty$ の極限をとると、

$$\alpha = \frac{3\alpha + 4}{2\alpha + 3}, \quad \therefore \alpha = \sqrt{2}.$$

別解 漸化式の a_n と a_{n+1} を共に α で置き換えた方程式 $\alpha = (3\alpha + 4)/(2\alpha + 3)$ を $\alpha > 0$ の条件で解くと、

$$\alpha = \sqrt{2}$$

が得られるから、数列が収束するならば、その極限値は α である。以下、数列 a_n が上に有界かつ単調増加であることを示す。数列の定義より $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n > 0$ であることは明らかである。

$$\alpha - a_{n+1} = \sqrt{2} - \frac{3a_n + 4}{2a_n + 3} = \frac{(3 - 2\sqrt{2})(\sqrt{2} - a_n)}{2a_n + 3} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2a_n + 3}(\alpha - a_n)$$

であり、^{*13} $(3 - 2\sqrt{2})/(2a_n + 3) > 0$ であるから、 $\alpha - a_n > 0$ であれば、 $\alpha - a_{n+1} > 0$ である。ここで、 $\alpha - a_1 = \sqrt{2} - 1 > 0$ であるから、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha - a_n > 0$ 、すなわち $a_n < \alpha$ であり、数列 a_n は上に有界である。また、 $0 < (3 - 2\sqrt{2})/(2a_n + 3) < 1$ より、

$$\alpha - a_{n+1} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2a_n + 3}(\alpha - a_n) < \alpha - a_n$$

より、 $a_{n+1} > a_n$ であるから、数列 a_n は単調増加である。したがって、数列 a_n は上に有界かつ単調増加であるから収束し、その極限値は $\alpha = \sqrt{2}$ である。

^{*12} ここでは $a_n < 2$ を示したが、右辺は $(1 + \sqrt{5})/2$ より大きければ何でもよい。

^{*13} 極限値が $\alpha = \sqrt{2}$ なので、以下のように 2 乗して評価するほうがきれいにまとまる。

$$\alpha^2 - a_{n+1}^2 = 2 - \left(\frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}\right)^2 = \frac{2 - a_n^2}{(2a_n + 3)^2} = \frac{\alpha^2 - a_n^2}{(2a_n + 3)^2}.$$

(4.9) $N_1 = \lfloor |x| + 1 \rfloor$ とすると, $n \geq N_1$ に対して,

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^{N_1-1}}{(N_1-1)!} \prod_{m=N_1}^n \frac{|x|}{m} \leq \frac{|x|^{N_1-1}}{(N_1-1)!} \cdot \left(\frac{|x|}{N_1}\right)^{n-N_1+1} = \frac{N_1^{N_1}}{N_1!} \cdot \left(\frac{|x|}{N_1}\right)^n$$

が成り立つ.*¹⁴ ここで, $|x|/N_1 < 1$ であるから, $\forall \epsilon > 0$ に対して,

$$\frac{N_1^{N_1}}{N_1!} \cdot \left(\frac{|x|}{N_1}\right)^{N_\epsilon} < \epsilon$$

を満たすような $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ をとることができる.*¹⁵ したがって, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N_\epsilon \implies |a_n - 0| = \frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{N_1^{N_1}}{N_1!} \cdot \left(\frac{|x|}{N_1}\right)^n \leq \frac{N_1^{N_1}}{N_1!} \cdot \left(\frac{|x|}{N_1}\right)^{N_\epsilon} < \epsilon$$

が成り立つから, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ である.

*¹⁴ わかりづらければ, $\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdots \frac{|x|}{N_1-1} \cdot \frac{|x|}{N_1} \cdots \frac{|x|}{n}$ のように書き下してみればよい.

*¹⁵ 具体的には, $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ を $\ln\left(\frac{N_1!}{N_1^{N_1}}\epsilon\right) / \ln\left(\frac{|x|}{N_1}\right)$ より大きく選べばよい.

付録 A ϵ - N 論法による数列の極限の定義

A.1 ϵ - N 論法を用いた数列の極限の定義

ϵ - N 論法を用いた $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ の定義は以下の通り.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ の定義

$\forall \epsilon > 0$ に対して, ある $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$n \geq N_\epsilon \implies |a_n - \alpha| < \epsilon.$$

$n \geq N_\epsilon$ の部分は, 等号を入れずに $n > N_\epsilon$ としてもよい. もちろん, 一方を定義とすれば, もう一方は定理となる. また, 参考までに $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ の定義を論理式で書けば, たとえば以下のようなになる.

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N_\epsilon \implies |a_n - \alpha| < \epsilon).$$

A.2 数列が収束しないこと

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ の定義を否定すると, 数列 a_n が α に収束しないことは, 以下のように書くことができる.

数列 a_n が α に収束しないこと

ある $\epsilon > 0$ があり, $\forall N_\epsilon \in \mathbb{N}$ に対して, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在し,

$$n \geq N_\epsilon \text{ かつ } |a_n - \alpha| \geq \epsilon.$$

「 $n \geq N_\epsilon$ かつ $|a_n - \alpha| \geq \epsilon$ 」は「 $n \geq N_\epsilon$ にも関わらず $|a_n - \alpha| \geq \epsilon$ 」と考えると分かりやすい. また, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ に対して上の命題が成り立てば, a_n は (どんな実数にも) 収束しないことになる. したがって, 数列 a_n が収束しないことは, ϵ - N 論法を用いて以下のように書くことができる.

数列 a_n が収束しないこと

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ に対して, ある $\epsilon > 0$ があり, $\forall N_\epsilon \in \mathbb{N}$ に対して, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在し,

$$n \geq N_\epsilon \text{ かつ } |a_n - \alpha| \geq \epsilon.$$

収束しない数列は発散するという. 数列 a_n が正の無限大に発散することの定義は脚注 *9 を参照. $-a_n$ が正の無限大に発散する数列 a_n は負の無限大に発散するという. $a_n = (-1)^n$ は発散するが, 正負の無限大には発散しない.

A.3 Cauchy の収束判定法

あとで示すように, 「数列 a_n が収束すること」は「数列 a_n が Cauchy 列であること」と同値である. 数列 a_n が Cauchy 列であることは以下のように定義される.

数列 a_n が Cauchy 列であることの定義

$\forall \epsilon > 0$ に対して, ある $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し, $\forall m, n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$m, n \geq N_\epsilon \implies |a_m - a_n| < \epsilon.$$

数列 a_n が Cauchy 列であるか否かによって数列の収束を判定する方法を「Cauchy の収束判定法」と呼ぶ。^{*16} Cauchy の収束判定法は極限値を用いずに数列の収束を示すことができる点で有用である。逆に言えば、極限値を求める際にはあまり役に立たない。

数列 a_n が収束する $\iff$ 数列 a_n が Cauchy 列である。

を以下で証明する。

証明 (a_n が収束 $\implies a_n$ が Cauchy 列) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ とする。 $\forall \epsilon > 0$ をとる。 仮定より、ある $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$n \geq N_\epsilon \implies |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2},$$

が成り立つ。このとき、 $\forall m, n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$m, n \geq N_\epsilon \implies |a_m - a_n| = |(a_m - \alpha) - (a_n - \alpha)| \leq |a_m - \alpha| + |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

が成り立つので、 a_n は Cauchy 列である。

(a_n が Cauchy 列 $\implies a_n$ が収束) $\forall \epsilon > 0$ をとる。 仮定より、ある $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し、 $\forall m, n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$m, n \geq N_\epsilon \implies |a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{3}$$

が成り立つ。^{*17} $n \geq N_\epsilon$ のとき、 $|a_n - a_{N_\epsilon}| < \epsilon/3$ より、 $|a_n| < |a_{N_\epsilon}| + \epsilon/3$ であるから、

$$|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_\epsilon-1}|, |a_{N_\epsilon}| + \frac{\epsilon}{3}$$

の最大値を M とすれば、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$ であり、数列 a_n は有界である。数列 a_n の任意の部分列も有界であるから、 a_n の第 n 項以降からなる部分列の上限からなる単調減少数列

$$b_n = \sup \{a_m \mid m \geq n, m \in \mathbb{N}\}$$

を定義することができる。数列 a_n が下に有界であるから、数列 b_n も下に有界で、下限 $\alpha = \inf \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が存在する。数列 a_n が α に収束することを示す。^{*18} α は b_n の下限であるから、ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在し、

$$\alpha \leq b_{N_1} < \alpha + \frac{\epsilon}{3} \iff 0 < b_{N_1} - \alpha < \frac{\epsilon}{3}, \quad \therefore |b_{N_1} - \alpha| < \frac{\epsilon}{3},$$

が成り立つ。ここで、 b_n が単調減少であることから、 N_1 は $N_1 \geq N_\epsilon$ を満たすようにとることができるので、以下では $N_1 \geq N_\epsilon$ を仮定する。さらに、 b_{N_1} は $\{a_m \mid m \geq N_1, m \in \mathbb{N}\}$ の上限なので、ある $N_2 (\geq N_1 \geq N_\epsilon) \in \mathbb{N}$ が存在し、

$$b_{N_1} - \frac{\epsilon}{3} < a_{N_2} < b_{N_1} \iff -\frac{\epsilon}{3} < a_{N_2} - b_{N_1} < 0, \quad \therefore |a_{N_2} - b_{N_1}| < \frac{\epsilon}{3},$$

が成り立つ。最後に、 $N_2 \geq N_\epsilon$ より、 $n \geq N_\epsilon$ に対して、

$$|a_n - a_{N_2}| < \frac{\epsilon}{3}$$

が成り立つ。以上より、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\begin{aligned} n \geq N_\epsilon \implies |a_n - \alpha| &= |(a_n - a_{N_2}) + (a_{N_2} - b_{N_1}) + (b_{N_1} - \alpha)| \\ &\leq |a_n - a_{N_2}| + |a_{N_2} - b_{N_1}| + |b_{N_1} - \alpha| \quad (\text{三角不等式}) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ である。

補足 「有界な (無限) 数列は収束する部分列を持つ」という Bolzano–Weierstrass の定理を用いると、もう少し簡潔に証明することができる。

^{*16} 級数の収束判定法として同名のものがある。

^{*17} 証明の最後で 3 項の和を ϵ で押さえることになるので、あらかじめ $|a_m - a_n|$ を $\epsilon/3$ で押さえておいた。以下同様。

^{*18} もちろん、数列 a_n が、数列 $c_n = \inf \{a_m \mid m \geq n, m \in \mathbb{N}\}$ の上限 $\alpha = \sup \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ に収束することを示してもよい。