

静電場と静磁場の法則

2024-4-17 ^{*1}

このノートは、静電場と静磁場の法則について一通り学んだ者に向けて、法則の相互関係について整理して理解するための補助となるべく書かれている。このノートで扱う静電場と静磁場の法則の一覧を付録 A にまとめる。ベクトル解析の最低限の知識は仮定する。単位系は SI を用いる。*印がついているところは、やや難しいか、あまり重要ではないので、初めは飛ばしてもよい。

目次

1	Coulomb の法則と Biot-Savart の法則	2
1.1	Coulomb の法則	2
1.2	Biot-Savart の法則	2
2	Coulomb の法則と Biot-Savart の法則から定常 Maxwell 方程式	3
2.1	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ — 微分形の Gauss の法則 —	4
2.2	$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$	4
2.3	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	4
2.4	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ — 微分形の Ampère の法則 —	4
3	定常 Maxwell 方程式から Coulomb の法則と Biot-Savart の法則	5
3.1	Helmholtz 分解	5
3.2	電磁ポテンシャルの導入	6
3.3	ゲージ変換とゲージ固定	7
3.4	電磁ポテンシャルに対する方程式 — Poisson 方程式 —	7
3.5	Coulomb の法則と Biot-Savart の法則	8
4	定常 Maxwell 方程式の積分形の法則	8
4.1	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ の積分形 — 積分形の Gauss の法則 —	8
4.2	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ の積分形 — 積分形の Ampère の法則	9
4.3	$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ の積分形	9
4.4	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の積分形	10
5	Coulomb の法則と Biot-Savart の法則から積分形の法則	10
5.1	Coulomb の法則から積分形の Gauss の法則	10
5.2	Biot-Savart の法則から積分形の Ampère の法則	11
A	静電場と静磁場の法則の一覧	12
A.1	Maxwell 方程式 — 電磁場の基本法則 —	12
A.2	静電場の法則	12
A.3	静磁場の法則	12
B	Poisson 方程式の解と Green 関数	13
B.1	Laplace 演算子の Green 関数と Poisson 方程式の特解	13
B.2	Poisson 方程式の解の一意性	14

^{*1} 最新版は[ここ](#)からダウンロード可能。

1 Coulomb の法則と Biot-Savart の法則

まずは、電磁気学で最も馴染みのあるであろう Coulomb の法則の復習を行う。また、静電場における Coulomb の法則に対応する静磁場の Biot-Savart の法則についてもあわせて確認する。

1.1 Coulomb の法則

原点にある点電荷 Q が位置 $\mathbf{r}$ につくる電場は、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1.1)$$

で与えられる。^{*2} 点電荷が原点ではなく $\mathbf{r}'$ にある場合には、相対ベクトル $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ を用いて、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.2)$$

となる。さらに、電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ で空間に電荷が分布している場合には、点 $\mathbf{r}'$ を含む微小領域 dV' 内の電荷 $\rho(\mathbf{r}')dV'$ がつくる電場の重ね合わせを考えることにより、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (1.3)$$

が得られる。^{*3} 空間積分の積分領域が明示されていないときには、全空間に渡る定積分を表すこととする。このノートでは、この式を Coulomb の法則と呼ぶことにする。^{*4}

1.2 Biot-Savart の法則

Coulomb の法則は静電場が電荷 (密度) によって生じることを述べているが、静磁場が電流 (密度) によって生じることを述べるのが、Biot-Savart の法則である。静磁場の法則である Biot-Savart の法則と、静電場の法則である Coulomb の法則には、明確な対応関係がある。Biot-Savart の法則は、Coulomb の法則の比例定数 $1/\epsilon_0$ を μ_0 に置き換え、^{*5} 電荷密度 $\rho(\mathbf{r}')$ と相対ベクトル $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ の積 $\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ を電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ と $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ の外積 $\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ に置き換えた形をしている。^{*6}

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} . \quad (1.4)$$

電場が電荷から放射状に生じるのに対して、磁場は電流に巻きつくように生じることを反映して、Biot-Savart の法則には外積が現れている。

^{*2} $\epsilon_0 \simeq 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ は真空の誘電率あるいは電気定数と呼ばれる定数であるが、その値を覚える必要はない。代わりに、(このノートでは示していない) $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ の関係から、Coulomb の法則の比例定数を $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} = c^2 \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 = (2.99792458)^2 \times 10^{-9} \text{ m/F}$ と計算できるようにしておくといよい。有効数字 2 桁で $1/4\pi\epsilon_0 = 9.0 \times 10^{-9} \text{ m/F}$ である。真空中の光速 $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$ は定義値で、この文明が続く限り変わることはないだろうから、暗記しておくといよい。真空の透磁率あるいは磁気定数と呼ばれる定数 μ_0 は、以前は定義値 $4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ であったが、2019 年 5 月 20 日の SI 基本単位の再定義で、それまで測定値だった電気素量 (素電荷) が定義値 $e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$ になったことに伴い、値が僅かに変化した。ただし、その変化は $\mu_0/(4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2) = 1.00000000054(15)$ と非常に小さいので、ふつうは $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ として計算してよい。

^{*3} 電荷が面状に分布しているときには、面電荷密度を $\sigma(\mathbf{r})$ として $dV'\rho(\mathbf{r}')$ を $dS'\sigma(\mathbf{r}')$ で置き換えればよい。同様に、電荷が線状に分布しているときには、線電荷密度を $\lambda(\mathbf{r})$ として $dr'\lambda(\mathbf{r}')$ で置き換えればよい。

^{*4} 点電荷 Q から相対位置 $\mathbf{r}$ にある点電荷 q に働く力の法則 $\mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$ を Coulomb の法則と呼ぶのが一般的である。これと、“電場の定義式”である $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ とをあわせて、点電荷がつくる電場についての法則が得られる。さらに、電場についての重ね合わせの原理を用いて、このノートで言う Coulomb の法則が得られる。

^{*5} 定数 ϵ_0 や μ_0 が現れるのは SI (国際単位系) を用いているためであり、この置き換えは本質的なものではない。単位系によっては $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ なので、このような置き換えは必要ない。

^{*6} 言うまでもないが、これは“Biot-Savart の法則の導出”などではなく、単なる覚え方にすぎない。

***§ 電流が経路に沿って流れる場合の Biot-Savart の法則** Biot-Savart の法則は、経路 C に沿って流れる定常電流 I がつくる磁場を求めるために用いられることが多い。経路 C を媒介変数 $\tau \in \mathcal{I}$ を用いて $C: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^3; \tau \mapsto \mathbf{s}(\tau)$ と表すと、電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ は、

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = I \int_{\mathcal{I}} d\tau \frac{d\mathbf{s}(\tau)}{d\tau} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\tau)) = I \int_C d\mathbf{s} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{s})$$

と表される。ここで、 $\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ は 3 次元デルタ関数であり、任意の関数 $f(\mathbf{r})$ に対して

$$\int dV' f(\mathbf{r}') \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = f(\mathbf{r}) \quad (1.5)$$

が成り立つものとして定義されている。積分領域は $\mathbf{r}$ を含んでいればどのように選んでもよい。このとき、Biot-Savart の法則は以下のように書き直すことができる。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_V dV' \int_C \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{s}) \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r} - \mathbf{s})}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^3}.$$

§Coulomb の法則と Biot-Savart の法則のまとめ Coulomb の法則と Biot-Savart の法則を再掲する。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int dV' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (1.7)$$

ここで、表記の簡略化のため、

$$\psi(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|} \quad (1.8)$$

という関数 $\psi(\mathbf{r})$ を定義しよう。^{*7} 原点にある点電荷 Q がつくる静電ポテンシャルが

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{\epsilon_0} \psi(\mathbf{r}) \quad (1.9)$$

であることを思い出せば、関数 $\psi(\mathbf{r})$ は単位点電荷のつくる静電ポテンシャル ($\times \epsilon_0$) を表していることがわかる。関数 $\psi(\mathbf{r})$ の性質および関連する事柄は付録 B にまとめてある。直接計算するとわかるように、 $\psi(\mathbf{r})$ は

$$\nabla \psi(\mathbf{r}) = \nabla \left(\frac{1}{4\pi r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (1.10)$$

を満たすので、^{*8} $\psi(\mathbf{r})$ を用いると、Coulomb の法則と Biot-Savart の法則は、以下のように書くことができる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.11)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.12)$$

2 Coulomb の法則と Biot-Savart の法則から定常 Maxwell 方程式

この章では、前章でまとめた Coulomb の法則と Biot-Savart の法則から、定常 Maxwell 方程式を導出する。^{*9} B.1 節で見るように、関数 $\psi(\mathbf{r}) = 1/4\pi r$ は、以下の重要な関係を満たす。

$$-\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) = -\nabla^2 \left(\frac{1}{4\pi r} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{4\pi r^3} \right) = \delta^{(3)}(\mathbf{r}). \quad (2.1)$$

Coulomb の法則と Biot-Savart の法則の発散や回転を計算し、 $\psi(\mathbf{r})$ についての公式およびベクトル解析の公式を用いることで、定常 Maxwell 方程式を導出することができる。その際、微分演算子 ∇ は $\mathbf{r}$ の関数にのみ作用することに注意する。^{*10}

^{*7} この関数を ψ と書くのはこのノート特有で、他で断りなく使っても理解してもらえないので注意。

^{*8} 後で見るように、物理学的な観点からは、原点にある点電荷 (電荷密度 $\rho(\mathbf{r}) = Q\delta^{(3)}(\mathbf{r})$) がつくる静電ポテンシャル (電位) が $\phi(\mathbf{r}) = Q/4\pi\epsilon_0 r$ であるという事実と、Poisson 方程式 $-\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0$ との整合性から、当然成り立つべき式であると言える。

^{*9} 逆に、定常 Maxwell 方程式から Coulomb の法則と Biot-Savart の法則を導出することができるので、これらは等価な法則であり、どちらを基本法則とみなすこともできる。しかし、非定常な場合への一般化を考えると、Maxwell 方程式は単純かつ豊富な内容を含んでおり、基本法則として相応しい。

^{*10} 座標 $\mathbf{r}'$ に関する微分演算子は ∇' と書いて区別することにする。

2.1 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ — 微分形の Gauss の法則 —

Coulomb の法則の発散を計算することで、微分形の **Gauss の法則** が得られる。

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \nabla \cdot \left(-\frac{1}{\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}).\end{aligned}\quad (2.2)$$

2.2 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$

Coulomb の法則の回転を計算することで、

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left(-\frac{1}{\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \nabla \times \nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

が得られる。この法則は**渦なしの法則**と呼ばれることがある。

2.3 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

公式 $\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{w})$ と $\nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') = \mathbf{0}$ を用いると、Biot-Savart の法則の発散から、

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \left(-\mu_0 \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) = \mu_0 \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot (\nabla \times \nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) = 0 \quad (2.4)$$

が得られる。法則 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は (微分形の) **磁場に関する Gauss の法則** と呼ばれることがある。

2.4 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ — 微分形の Ampère の法則 —

Biot-Savart の法則の法則の回転 $\nabla \times \mathbf{B}$ の計算は少し面倒である。公式

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{w}) - \mathbf{w}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} \quad (2.5)$$

で、特に $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ が定ベクトル場 $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{c}$ のときには

$$\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{w}) - (\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{w} \quad (2.6)$$

となることを用いると、Biot-Savart の法則の回転から、

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \left(-\mu_0 \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) \\ &= -\mu_0 \int dV' \nabla \times (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \\ &= -\mu_0 \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla^2 \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \mu_0 \int dV' (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}').\end{aligned}\quad (2.7)$$

が得られる。以下で各項を別々に計算する。第1項は、

$$-\mu_0 \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla^2 \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \mu_0 \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (2.8)$$

と計算できる。一方、第2項は、任意のスカラー場 $f(\mathbf{r})$ に対して $\nabla f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\nabla' f(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ が成り立つことと、任意のスカラー場 $f(\mathbf{r})$ とベクトル場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ に対して

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)f = v_i \partial_i f = \partial_i (v_i f) - (\partial_i v_i) f = \nabla \cdot (\mathbf{v} f) - (\nabla \cdot \mathbf{v}) f \quad (2.9)$$

が成り立つことを用いると、

$$\begin{aligned}\mu_0 \int dV' (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \mu_0 \nabla \int dV' (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla) \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= -\mu_0 \nabla \int dV' (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \nabla') \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= -\mu_0 \nabla \int dV' \nabla' \cdot (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) + \mu_0 \nabla \int dV' (\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\end{aligned}\quad (2.10)$$

と書き直すことができる。この第 1 項は、Gauss の発散定理を用いると、

$$-\mu_0 \nabla \int dV' \nabla' \cdot (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) = -\mu_0 \nabla \int d\mathbf{S}' \cdot (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) = 0 \quad (2.11)$$

と計算できる。ここで、電流密度 $\mathbf{j}$ が無限遠で $\mathbf{0}$ となり、表面積分は消えると仮定した。また、第 2 項は定常な場合の連続の式 (局所的電荷保存則) $\nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$ を用いると消える。^{*11} 以上の計算から、微分形の **Ampère の法則**

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (2.12)$$

が成り立つことが分かる。ここで、 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) = 0$ であるから、微分形の Ampère の法則は定常な場合の電荷の保存則 $\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ と整合的である。

§ 定常 Maxwell 方程式のまとめ 定常 Maxwell 方程式は、電場と磁場のそれぞれに対する独立な連立方程式系となっている。

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}), & \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. & \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}). \end{cases} \quad (2.13)$$

これらの方程式は、静電場と静磁場の起源がそれぞれ電荷 (密度) と電流 (密度) であるという事実に加え、静電場と静磁場の幾何学的な違いを表している。すなわち、電場は「発散あり・回転なし (渦なし)」、磁場は「発散なし・回転あり (渦あり)」であり、静電場は電荷から放射状に生じ、静磁場は電流に巻きつくように生じることを示している。

3 定常 Maxwell 方程式から Coulomb の法則と Biot-Savart の法則

次に、前章とは逆に、定常 Maxwell 方程式から Coulomb の法則と Biot-Savart の法則を導出する。そのためにはスカラーポテンシャル (静電ポテンシャル) とベクトルポテンシャルを導入すると見通しがよい。まずはポテンシャルを導入する数学的な基礎である Helmholtz 分解について解説する。

3.1 Helmholtz 分解

任意のベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ は、あるスカラー場 $\phi(\mathbf{r})$ とベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ を用いて

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (3.1)$$

と書くことができる。^{*12} 第 1 項 $-\nabla \phi$ の負号は慣習である。 ϕ はスカラーポテンシャル、 $\mathbf{A}$ はベクトルポテンシャルと呼ばれる。このように、ベクトル場をスカラー場の勾配とベクトル場の回転の和で表すことを **Helmholtz 分解** と呼ぶ。ベクトル解析の公式より $\nabla \times (-\nabla \phi) = \mathbf{0}$ と $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ が成り立つから、Helmholtz 分解は、ベクトル場を回転が $\mathbf{0}$ の成分と勾配が $\mathbf{0}$ の成分に分ける操作であると言える。^{*13} 任意のベクトル場が Helmholtz 分解できることを保証するのが **Helmholtz の定理** である。

§ Helmholtz の定理の証明 ベクトル解析の公式を用いて証明する。まず、微分方程式 $-\nabla^2 \mathbf{U}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}(\mathbf{r})$ の解としてベクトル場 $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ を定める。この微分方程式は各成分ごとに Poisson 方程式になっており、適当な境界条件を課すことで解くことができる (付録 B)。ベクトル解析の公式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \nabla^2 \mathbf{U}$ を用いると、

$$\mathbf{V} = -\nabla^2 \mathbf{U} = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}) \quad (3.2)$$

と書くことができる。したがって、 $\phi(\mathbf{r}) \equiv \nabla \cdot \mathbf{U}(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \nabla \times \mathbf{U}(\mathbf{r})$ と定義することで、 $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ と Helmholtz 分解できる。Helmholtz の定理からの帰結として、**Poincaré の補題** と呼ばれる以下の定理が成り立つ。

^{*11} 連続の式 (局所的電荷保存則) は $\partial_t \rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$ である。定常な場合は $\partial_t \rho(\mathbf{r}) = 0$ であるから、 $\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ となる。

^{*12} $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ が十分に滑らかである必要がある。また、ポテンシャルを Poisson 方程式の解として具体的に積分で書く際には、 $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ が遠方で十分に ($1/r$ と同程度かそれよりも) 速く減衰することを仮定する必要がある。このノートでは数学的に細かいことはあまり気にしない。

^{*13} ベクトル場 $\mathbf{V}$ は $\nabla \cdot \mathbf{V}_1 = 0$ と $\nabla \times \mathbf{V}_2 = \mathbf{0}$ を満たすベクトル場 $\mathbf{V}_1$ と $\mathbf{V}_2$ により $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ と Helmholtz 分解できる。 $\mathbf{V}_1$ と $\mathbf{V}_2$ が満たす式を Fourier 変換すると、それぞれ $\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_1 = 0$ と $\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{V}}_2 = \mathbf{0}$ となり、 $\tilde{\mathbf{V}}_1$ は $\mathbf{k}$ に平行、 $\tilde{\mathbf{V}}_2$ は $\mathbf{k}$ に垂直なベクトルである。このことから、 $\mathbf{V}_1 \equiv \mathbf{V}_\parallel$ を縦場、 $\mathbf{V}_2 \equiv \mathbf{V}_\perp$ を横場と呼び、Helmholtz 分解を縦横分解と呼ぶことがある。ちなみに、「回転が $\mathbf{0}$ 」のことを「渦なし (rotation-free)」と言うことがある。「発散が 0 」は “divergence-free” だが、これに該当する適当な日本語の用語はおそらくない。

(i) $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$ のとき $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$ と書ける $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$ の場合には,

$$\mathbf{0} = \nabla \times \mathbf{V} = -\nabla \times \nabla^2 \mathbf{U} = -\nabla^2(\nabla \times \mathbf{U}) = -\nabla^2 \mathbf{A} \quad (3.3)$$

より, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ は Laplace 方程式の解 (調和関数) であるから, $r = |\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ で $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{0}$ という境界条件を満たす解は, $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ である (B.2 節). したがって,

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \quad (3.4)$$

と書ける.

(ii) $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ のとき $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ と書ける $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ の場合には,

$$\mathbf{0} = \nabla \cdot \mathbf{V} = -\nabla \cdot \nabla^2 \mathbf{U} = -\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{U}) = -\nabla^2 \phi \quad (3.5)$$

より, $\phi(\mathbf{r})$ は Laplace 方程式の解 (調和関数) であるから, $r = |\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ で $\phi(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ という境界条件を満たす解は, $\phi(\mathbf{r}) = 0$ である (B.2 節). したがって,

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (3.6)$$

と書ける.

§Helmholtz 分解の不定性 — ゲージ自由度 — Helmholtz 分解におけるスカラー場 $\phi(\mathbf{r})$ とベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ の選び方には不定性があることを指摘しておく. Helmholtz 分解において, $\phi(\mathbf{r})$ や $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ は微分を伴って現れているから, たとえば, $\phi(\mathbf{r})$ に定数 c を, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ に定ベクトル $\mathbf{C}$ を加えた,

$$\phi'(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) + c, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathbf{C}, \quad (3.8)$$

を用いても, 以下のようにベクトル場 $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ を Helmholtz 分解できる.

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi'(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}'(\mathbf{r}). \quad (3.9)$$

しかし, この種の不定性は「ポテンシャル」と呼ばれる量が共通に持つ基準点の選び方の任意性に起因するものであり, あまり重要ではない. 非自明なものとしては, ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ に回転が $\mathbf{0}$ のベクトル場, すなわち, あるスカラー場の勾配 $\nabla\chi(\mathbf{r})$ を加えて,

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r}), \quad (3.10)$$

とする自由度がある. $\nabla \times \nabla\chi = \mathbf{0}$ より $\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A}$ であるから, 変換後の $\mathbf{A}'$ を用いても同じベクトル場 $\mathbf{V}$ を Helmholtz 分解することができる. このような Helmholtz 分解の自由度 (任意性) をゲージ自由度と言い, 異なるポテンシャルの選び方を関係付ける変換をゲージ変換と呼ぶ.

3.2 電磁ポテンシャルの導入

電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ と磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ はそれぞれ $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ と $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$ を満たすから, Helmholtz の定理 (Poincaré の補題) によって, あるスカラー場 $\phi(\mathbf{r})$ とベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ を用いて,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}), \quad (3.11)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (3.12)$$

と書くことができる. 先にも述べたように $\phi(\mathbf{r})$ をスカラーポテンシャル, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ をベクトルポテンシャルと呼ぶ. 電磁気学ではスカラーポテンシャルを静電ポテンシャルとも呼び, ベクトルポテンシャルと合わせて電磁ポテンシャルと呼ぶ. 電磁ポテンシャルを導入することで, Maxwell 方程式のうちの 2 式 ($\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ と $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) を形式的に解いたことになる.

3.3 ゲージ変換とゲージ固定

先に述べたように、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ には関数 $\nabla\chi(\mathbf{r})$ を加える不定性 (ゲージ自由度) が存在する。すなわち、新しいベクトルポテンシャル $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ を、

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r}) \quad (3.13)$$

で定めると、 $\nabla \times \nabla\chi = 0$ より、 $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ と $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ は同じ磁場を導く。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}'(\mathbf{r}) . \quad (3.14)$$

$\mathbf{A}(\mathbf{r})$ と $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ は、ベクトルポテンシャルとして全く同等であり、どちらを選んでも物理的に何も違いはない。この自由度は物理の本質を見辛くする厄介な存在であると同時に、計算を簡単にしてくれる便利な存在でもある。ベクトルポテンシャルに対して適当な条件を課すことでゲージ自由度を固定することを**ゲージ固定**と言う。静磁場の議論では、 $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ を満たす **Coulomb ゲージ** が便利である。

§Coulomb ゲージ Coulomb ゲージは

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.15)$$

という条件で定義される。Coulomb ゲージをとることができることの証明は以下の通り。まず、適当なベクトルポテンシャル $\mathbf{A}_0(\mathbf{r})$ を選ぶ。ゲージ変換 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \nabla\chi(\mathbf{r})$ を考え、この発散をとると、

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{A}_0(\mathbf{r}) + \nabla^2\chi(\mathbf{r}) . \quad (3.16)$$

したがって、スカラー場 $\chi(\mathbf{r})$ を Poisson 方程式 $\nabla^2\chi(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{A}_0(\mathbf{r})$ の解に選ぶことで、 $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ とできる。

3.4 電磁ポテンシャルに対する方程式 — Poisson 方程式 —

定常 Maxwell 方程式のうちの 2 式 ($\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ と $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) は、スカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ を用いて電場と磁場をそれぞれ $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$ と $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ と書くことで自動的に満たされる。定常 Maxwell 方程式の残りの 2 式

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) , \quad (3.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) , \quad (3.18)$$

を電磁ポテンシャルを用いて書き直すと、

$$-\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) , \quad (3.19)$$

$$-\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) , \quad (3.20)$$

となる。ここで、Coulomb ゲージ $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ をとると、方程式は、

$$-\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) , \quad (3.21)$$

$$-\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) , \quad (3.22)$$

となり、成分で数えると 4 本の Poisson 方程式が得られる。これらの Poisson 方程式の解は、関数 $\psi(\mathbf{r}) = -1/4\pi r$ を用いて、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') , \quad (3.23)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') , \quad (3.24)$$

と書くことができる (付録 B.1)。 $\psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/\epsilon_0$ は点 $\mathbf{r}'$ にある単位電荷が $\mathbf{r}$ につくる静電ポテンシャルを表しているから、 $\rho(\mathbf{r}')dV' \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/\epsilon_0$ は点 $\mathbf{r}'$ にある (微小) 電荷 $\rho(\mathbf{r}')dV'$ が $\mathbf{r}$ につくる静電ポテンシャルを表しており、与えられ

た電荷分布がつくる静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ はそれらの重ね合わせて求められるということを述べている。この解は、以下のように電場と磁場からスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを計算するための公式と見ることもできる。

$$\phi(\mathbf{r}) = \int dV' (\nabla' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int dV' \frac{\nabla' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int dV' (\nabla' \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')) \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int dV' \frac{\nabla' \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (3.26)$$

3.5 Coulomb の法則と Biot-Savart の法則

電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ と磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ は、前節で得られた電磁ポテンシャルから以下のように計算できる。^{*14}

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \nabla\psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla\psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (3.28)$$

これらは Coulomb の法則と Biot-Savart の法則に他ならず、Coulomb の法則と Biot-Savart の法則が、定常 Maxwell 方程式の形式解であることが示された。

4 定常 Maxwell 方程式の積分形の法則

4.1 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ の積分形 — 積分形の Gauss の法則 —

微分形の Gauss の法則

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (4.1)$$

を、ある空間領域 V で積分すると、

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (4.2)$$

となる。右辺の積分は領域 V 内の全電荷 Q_V を表す。

$$Q_V = \int_V \rho dV. \quad (4.3)$$

一方、左辺に Gauss の発散定理を用いると、

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \oint_{S=\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.4)$$

と書くことができる。以上から、積分形の Gauss の法則を得る。

$$\oint_{S=\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_V. \quad (4.5)$$

領域 V は任意に選べることから、ここでの議論を逆に辿ることで、積分形の Gauss の法則から微分形の Gauss の法則を導くことができる。したがって、これらの法則は等価である。

^{*14} 磁場の計算には、任意のスカラー場 $f(\mathbf{r})$ とベクトル場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ について $\nabla \times (\mathbf{v}f) = (\nabla \times \mathbf{v})f - \mathbf{v} \times \nabla f$ が成り立ち、特に $\mathbf{v}$ が定ベクトル $\mathbf{v} = \mathbf{c}$ の場合に $\nabla \times (\mathbf{c}f) = -\mathbf{c} \times \nabla f$ となることを用いた。公式の証明は以下の通り。

$$\begin{aligned} (\nabla \times (\mathbf{v}f))_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j (\mathbf{v}f)_k = \epsilon_{ijk} \partial_j (v_k f) = \epsilon_{ijk} ((\partial_j v_k) f + v_k (\partial_j f)) = (\epsilon_{ijk} \partial_j v_k) f - \epsilon_{ikj} v_k (\nabla f)_j \\ &= (\nabla \times \mathbf{v})_i f - (\mathbf{v} \times \nabla f)_i = ((\nabla \times \mathbf{v})f - \mathbf{v} \times \nabla f)_i. \end{aligned}$$

4.2 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ の積分形 — 積分形の Ampère の法則

微分形の Ampère の法則

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (4.6)$$

を、ある曲面 S で面積分すると、

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.7)$$

となる。右辺の積分は曲面 S を貫く全電流 I_S を表す。

$$I_S = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} . \quad (4.8)$$

一方、左辺に Stokes の定理を用いると、

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{C=\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.9)$$

と書くことができる。以上から、積分形の Ampère の法則を得る。

$$\oint_{C=\partial S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_S . \quad (4.10)$$

曲面 S は任意に選べることから、ここでの議論を逆に辿ることで、積分形の Ampère の法則から微分形の Ampère の法則を導くことができる。したがって、これらの法則は等価である。

4.3 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ の積分形

静電場の法則のまとめ (A.2 節) には載せなかったが、 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ の積分形の法則も書き下すことができる。左辺は微分形の Ampère の法則と同じ形をしているから、曲面 S で面積分することにより、以下の法則が得られる。

$$\oint_{C=\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 . \quad (4.11)$$

この法則は、電荷 q に働く Coulomb 力が $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ と表されることがとあわせて、どのような閉経路 $C = \partial S$ を一周しても静電場から仕事を取り出すことができないこと、すなわち静電場が保存場であることを表している。法則 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ は渦なしの法則と呼ばれることもある。場が時間に依存する非定常な場合には、この法則は Faraday–Maxwell の法則 (Faraday の電磁誘導の法則の一部) に拡張される。

***§ 電場の線積分としてのスカラーポテンシャル** 渦なしの法則 $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ の帰結として、スカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ を電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ の線積分として与えることができる。^{*15} 適当な基準点 $\mathbf{r}_0$ から位置 $\mathbf{r}$ までの線積分が積分経路に依らないことを示す。 $\mathbf{r}_0$ から $\mathbf{r}$ までの2つの経路 C_1 と C_2 を考えると、Stokes の定理を用いて、

$$\int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{C_1-C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (4.12)$$

となる。ここで、 S は閉曲線 $C_1 - C_2$ を境界とする任意の曲面である。これより、スカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ は、積分経路に依らず、

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} \quad (4.13)$$

と一意的に定義できることが示された。この $\phi(\mathbf{r})$ が電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ を導くことは、以下のように確かめることができる。

$$\begin{aligned} -\partial_i \phi(\mathbf{r}) &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\phi(\mathbf{r} + h\mathbf{e}_i) - \phi(\mathbf{r}) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}+h\mathbf{e}_i} \mathbf{E}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+h\mathbf{e}_i} \mathbf{E}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot h\mathbf{e}_i + \mathcal{O}(h^2) \right) = E_i(\mathbf{r}) . \end{aligned} \quad (4.14)$$

^{*15} ベクトルポテンシャルを磁場の線積分として表すこともできるが、ベクトルポテンシャルにゲージ自由度が存在するなどの理由からスカラーポテンシャルほど簡単に書くことができないので、このノートでは扱わない。^{3.4} 節で見たように、スカラーポテンシャルやベクトルポテンシャルは電場や磁場の空間積分としても表すことができる。

$\mathbf{r}$ から $\mathbf{r} + h\mathbf{e}_i$ への積分は、線積分が経路に依らないことから、2 点を結ぶ線分を選んで評価すればよい。また、基準点を $\mathbf{r}'_0$ と変更したときのスカラーポテンシャルを $\phi'(\mathbf{r})$ とすると、

$$\phi'(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}'_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}'_0} \mathbf{E}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} = \phi(\mathbf{r}) + \text{Const.}, \quad (4.15)$$

となるから、基準点を変更することによるスカラーポテンシャルの変化は定数であり、先に述べたスカラーポテンシャルの不定性の範囲に収まる。

4.4 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の積分形

静磁場の法則のまとめ (A.3 節) には載せなかったが、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の積分形の法則も書き下すことができる。左辺は (電場に関する) 微分形の Gauss の法則と同じ形をしているから、空間領域 V で積分することにより、以下の法則が得られる。

$$\oint_{S=\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (4.16)$$

この法則は、電場の源が電荷であることとは対照的に、磁場の源になり得る「磁荷」というものが存在しないことを表す。^{*16} Ampère の法則が述べているように、磁場は磁荷ではなく電流によって生成される。法則 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ やその積分形は、「磁場に関する Gauss の法則」と呼ばれることがあり、磁束線には始点と終点が無く閉曲線になっていることを表している。

5 Coulomb の法則と Biot-Savart の法則から積分形の法則

最後に、定常 Maxwell 方程式の形式解である Coulomb の法則と Biot-Savart の法則から、積分形の法則を導く。

5.1 Coulomb の法則から積分形の Gauss の法則

Coulomb の法則

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.1)$$

を、ある閉曲面 $S = \partial V$ で面積分すると、

$$\oint_{S=\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \oint_{S=\partial V} (\nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \cdot d\mathbf{S} \quad (5.2)$$

となる。ここで、Gauss の発散定理より

$$\oint_{S=\partial V} (\nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) dV = - \int_V \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV \quad (5.3)$$

と計算できるから、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \oint_{S=\partial V} (\nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \cdot d\mathbf{S} &= \frac{1}{\epsilon_0} \int dV' \rho(\mathbf{r}') \int_V \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dV \int dV' \rho(\mathbf{r}') \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dV \rho(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (5.4)$$

と計算でき、積分形の Gauss の法則

$$\oint_{S=\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V dV \rho(\mathbf{r}) \quad (5.5)$$

を得る。

^{*16} 「磁荷 (magnetic charge)」は「磁気単極子 (magnetic monopole)」とも呼ばれる。もし磁気単極子が発見されれば、法則 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は $\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m$ と修正されなければならない。

5.2 Biot–Savart の法則から積分形の Ampère の法則

Biot–Savart の法則

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.6)$$

を, ある曲面 S の周囲である閉曲線 $C = \partial S$ で線積分すると,

$$\oint_{C=\partial S} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = -\mu_0 \int dV' \oint_{C=\partial S} (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \cdot d\mathbf{s} \quad (5.7)$$

となる. ここで, Stokes の定理より

$$\oint_{C=\partial S} (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))) \cdot d\mathbf{S} \quad (5.8)$$

と書けるから,

$$\begin{aligned} -\mu_0 \int dV' \oint_{C=\partial S} (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \cdot d\mathbf{s} &= -\mu_0 \int_S \left(\int dV' \nabla \times (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \right) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \mu_0 \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (5.9)$$

と計算でき, 積分形の Ampère の法則

$$\oint_{C=\partial S} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad (5.10)$$

を得る. ここで, 2.4 節で微分形の Ampère の法則を導いたときと全く同様の評価を行い,

$$-\int dV' \nabla \times (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (5.11)$$

と計算できることを用いた.

A 静電場と静磁場の法則の一覧

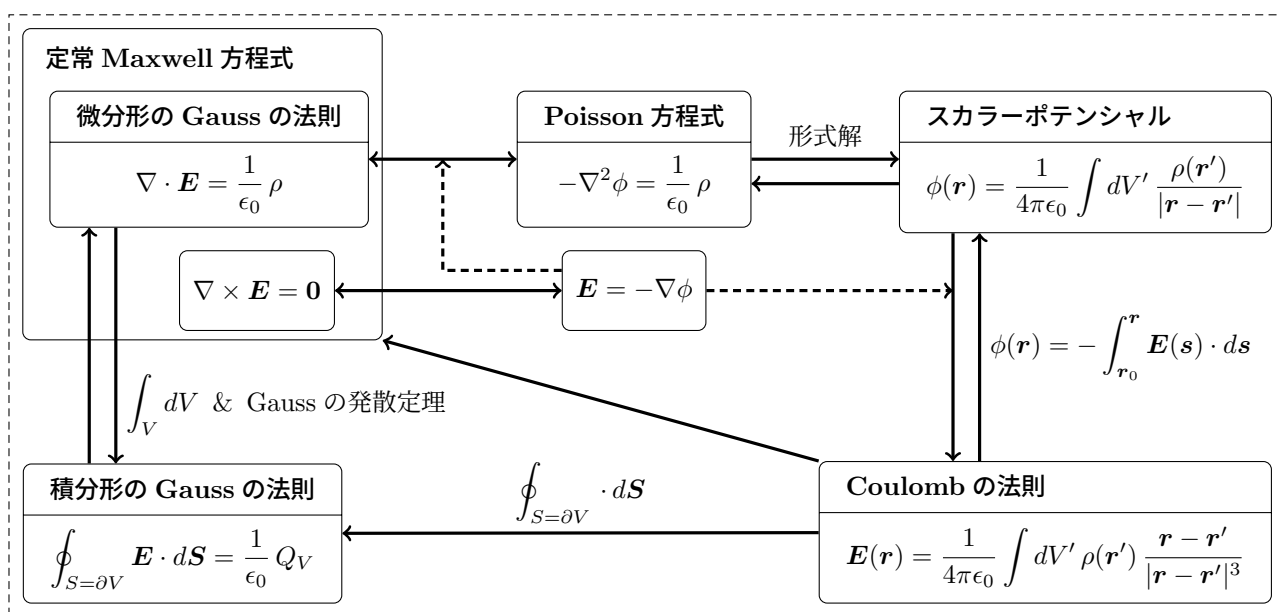
A.1 Maxwell 方程式 — 電磁場の基本法則 —

Maxwell 方程式は以下の 4 本の連立偏微分方程式である.

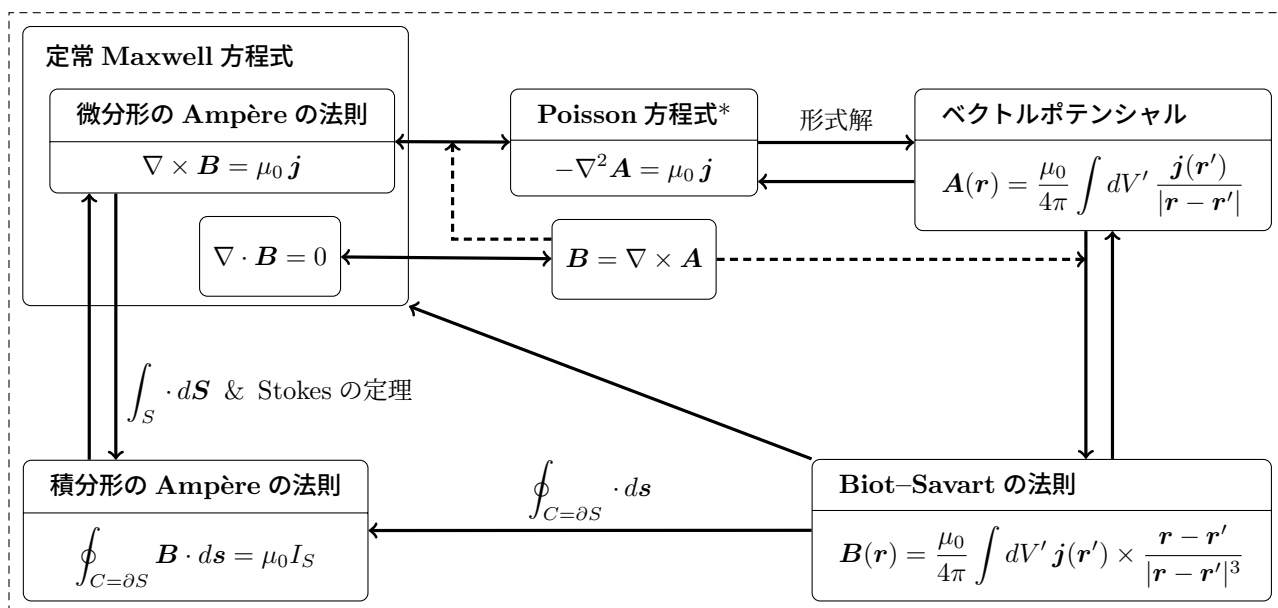
$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t), & (\text{Gauss の法則}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0, & (\text{磁場に関する Gauss の法則}) \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{0}, & (\text{Faraday-Maxwell の法則}) \\ \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). & (\text{Ampère-Maxwell の法則})\end{aligned}$$

時間依存性を落とすことで, 定常 Maxwell 方程式が得られる.

A.2 静電場の法則



A.3 静磁場の法則



* ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ は Coulomb ゲージ ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) をとっている.

B Poisson 方程式の解と Green 関数

関数 $f(\mathbf{r})$ についての Poisson 方程式

$$-\nabla^2 f(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}) \quad (\text{B.1})$$

の解とその性質についてまとめる. Poisson 方程式の解は, $-\nabla^2 f_p(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r})$ を満たす特解 $f_p(\mathbf{r})$ と, 同次方程式 $\nabla^2 f_0(\mathbf{r}) = 0$ の解 $f_0(\mathbf{r})$ の重ね合わせで表される. 同次方程式 $\nabla^2 f_0(\mathbf{r}) = 0$ は **Laplace 方程式**と呼ばれる. **B.1** 節では Poisson 方程式の特解の求め方を説明し, 続く **B.2** 節では境界条件を満たす Poisson 方程式の解が一意的に定まることを示す. 本文を理解するだけであれば **B.1** 節のみ読めば十分である.

B.1 Laplace 演算子の Green 関数と Poisson 方程式の特解

Poisson 方程式の特解 $f_p(\mathbf{r})$ は, 3次元デルタ関数を $\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ として, $-\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) = \delta^{(3)}(\mathbf{r})$ を満たす関数 $\psi(\mathbf{r})$ を見つけることができれば,

$$f_p(\mathbf{r}) = \int dV' g(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{B.2})$$

と求めることができる. 関数 g の引数が $\mathbf{r}$ ではなく $\mathbf{r}'$ になっていることに注意. $f_p(\mathbf{r})$ が Poisson 方程式を満たすことは $-\nabla^2$ を作用させることで直接示すことができる.

$$-\nabla^2 f_p(\mathbf{r}) = \int dV' g(\mathbf{r}') (-\nabla^2 \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) = \int dV' g(\mathbf{r}') \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g(\mathbf{r}). \quad (\text{B.3})$$

ここで, ∇^2 は座標 $\mathbf{r}$ についての微分演算子であるから, $\mathbf{r}'$ のみの関数 $g(\mathbf{r}')$ には作用しないことに注意. このように, 源泉項 $g(\mathbf{r})$ にかけて積分することで微分方程式の解が得られるような関数を **Green 関数** (Green's function) と呼ぶ.^{*17} 以下, 微分方程式 $-\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) = \delta^{(3)}(\mathbf{r})$ で定義される Green 関数 $\psi(\mathbf{r})$ が,^{*18}

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|} \quad (\text{B.4})$$

と書けることを示そう. Green 関数 $\psi(\mathbf{r})$ を求める方法は色々あるが, ここでは微分方程式を満たすことを直接計算して示す方法 (Gauss の発散定理を用いる方法) と, Fourier 変換を用いる方法を紹介する.

B.1.1 Gauss の発散定理を用いる方法

以下の (i) $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ の場合と, (ii) $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ における振舞いの解析から, 関数 $\psi(\mathbf{r}) = 1/4\pi r$ が確かに $-\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) = \delta^{(3)}(\mathbf{r})$ を満たすことがわかる.

(i) $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ のとき $\partial_i(1/r) = -1/r^2(\partial_i r) = -r_i/r^3$ を用いると,

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \partial_i \partial_i \left(\frac{1}{r} \right) = \partial_i \left(-\frac{r_i}{r^3} \right) = -\frac{3}{r^3} + r_i \cdot \frac{3(\partial_i r)}{r^4} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3r_i r_i}{r^5} = 0. \quad (\text{B.5})$$

したがって,

$$-\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) = -\nabla^2 \left(\frac{1}{4\pi r} \right) = 0. \quad (\text{B.6})$$

(ii) $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ における振舞い 原点を中心とする半径 a の球 V_a で $-\nabla^2 \psi(\mathbf{r})$ を空間積分してみると,^{*19}

$$\int_{V_a} (-\nabla^2 \psi(\mathbf{r})) dV = \int_{V_a} \nabla \cdot (-\nabla \psi(\mathbf{r})) dV = \oint_{S_a} (-\nabla \psi(\mathbf{r})) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_a} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi a^2} \oint_{S_a} dS = 1 \quad (\text{B.7})$$

^{*17} Green は「緑」ではなく, George Green という英国人数学者の名前. 「Green 関数」という具体的な関数があるわけではない. 「微分方程式を解くための Green による方法」くらいに考えておくとうい. 今の場合, 「 $\psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ は微分方程式 $\nabla^2 f(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r})$ の Green 関数である」あるいは「 $\psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ は微分演算子 ∇^2 の Green 関数である」というような言い方をする. また, $\psi(\mathbf{r})$ は Laplace 方程式の基本解とも呼ばれる.

^{*18} 負号を付けずに $\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) = \delta^{(3)}(\mathbf{r})$ としたり, 4π を掛けて $-\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) = 4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{r})$ として Green 関数を定義することもある.

^{*19} $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ で $-\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) = 0$ だから, 原点を含む任意の領域の積分は, 原点を中心とした球の積分と等しい.

と計算できる。2 つ目の等号では Gauss の発散定理を用い、 $S_a = \partial V_a$ と書いた。^{*20} また、 S_a は球面であるから、面素ベクトルは $d\mathbf{S} = (\mathbf{r}/r)dS$ と書け、 S_a 上で $r = a$ であることを用いた。したがって、球 V_a の半径に依らず、積分は以下の結果となる。^{*21}

$$\int_V (-\nabla^2 \psi(\mathbf{r})) dV = 1. \quad (\text{B.8})$$

B.1.2 Fourier 変換を用いる方法

$$\psi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Psi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (\text{B.9})$$

と Fourier 変換すると、微分方程式 $-\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) = \delta^{(3)}(\mathbf{r})$ は $\Psi(\mathbf{k})$ についての代数方程式となり、容易に解ける。

$$k^2 \Psi(\mathbf{k}) = 1, \quad \therefore \Psi(\mathbf{k}) = \frac{1}{k^2}. \quad (\text{B.10})$$

これを Fourier 変換の表式に代入して、

$$\psi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{k^2} \quad (\text{B.11})$$

を得る。この積分を実行することで Green 関数 $\psi(\mathbf{r})$ が求まる。極座標に移って計算を行う。

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\phi \frac{e^{ikr \cos \theta}}{k^2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \int_{-1}^1 d(\cos \theta) e^{ikr \cos \theta} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{\sin(kr)}{kr} = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dt \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{4\pi r}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

ここで、Dirichlet 積分 $\int_0^\infty dt \frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{2}$ を用いた。^{*22}

B.2 Poisson 方程式の解の一意性

Poisson 方程式 $-\nabla^2 f(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r})$ を、ある領域 V で境界条件 $f(\mathbf{r}) = h(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r} \in \partial V$) を課して解くことを考える (Dirichlet 問題)。^{*23} 関数 $h(\mathbf{r})$ は ∂V 上で有界であるとする。Poisson 方程式の解が存在することを認めると、^{*24} その解が一意的であることが簡単に示せる。同じ境界条件を満たす Poisson 方程式の 2 解 $f_1(\mathbf{r})$ と $f_2(\mathbf{r})$ に対して、その差 $\delta f(\mathbf{r}) \equiv f_1(\mathbf{r}) - f_2(\mathbf{r})$ は境界条件 $\delta f(\mathbf{r}) = 0$ ($\mathbf{r} \in \partial V$) を満たす Laplace 方程式

$$\nabla^2 \delta f(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{B.13})$$

の解である。B.2.2 節で示す調和関数の最大値原理より、調和関数 $\delta f(\mathbf{r})$ は領域 V の境界 ∂V 上で最大値と最小値をとるが、境界条件から ∂V 上で $\delta f(\mathbf{r}) = 0$ であるから、 $V \cup \partial V$ 上で $\delta f(\mathbf{r})$ の最大値と最小値はともに 0 であり、 $V \cup \partial V$ 上の至るところで $\delta f(\mathbf{r}) = 0$ である。よって、 $\delta f(\mathbf{r}) = f_1(\mathbf{r}) - f_2(\mathbf{r}) = 0$ より $f_1(\mathbf{r}) = f_2(\mathbf{r})$ であることが示された。このことから、境界条件を満たす Poisson 方程式の解が 1 つ見つければ、それが唯一の解であることが保証される。つまり、B.1 節で求めた Poisson 方程式の Green 関数 $\psi(\mathbf{r})$ は、 $r = |\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ で $\psi(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ という境界条件を満たす唯一の解である。

^{*20} 原点で正則でない関数 $\nabla^2 \psi(\mathbf{r})$ に Gauss の発散定理を適用するのが気になれば、 $\psi_\epsilon(\mathbf{r}) = -1/4\pi\sqrt{r^2 + \epsilon^2}$ など適当な正則化を行えばよい。

^{*21} 同様の計算で、 $f_p(\mathbf{r}) = \int dV' g(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ が Poisson 方程式 $-\nabla^2 f_p(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r})$ を満たすことを直接示すことができる。まず $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$ のとき $-\nabla^2 \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0$ であることから、

$$-\nabla^2 f_p(\mathbf{r}) = \int dV' g(\mathbf{r}') (-\nabla^2 \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) = \int dV' g(\mathbf{r}') (-\nabla'^2 \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) = g(\mathbf{r}) \int dV' (-\nabla'^2 \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))$$

のように、 $g(\mathbf{r})$ を積分の外に出せる。さらに、 $\nabla \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\nabla' \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ を用いて $\mathbf{r}$ についての微分を $\mathbf{r}'$ についての微分に書き換えれば、本文と同様の計算で $\int dV' (-\nabla'^2 \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) = \int dV' (-\nabla'^2) \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 1$ を示すことができる。

^{*22} Dirichlet 積分は複素積分などを用いて評価することができる。例えば、英語版 Wikipedia の “Dirichlet integral” のページ [\[Link\]](#) に複数の評価方法が紹介されている。

^{*23} 境界上で関数の値を与える境界条件を Dirichlet 境界条件 (第 1 種境界条件)、関数の微分の値を与える境界条件を Neumann 境界条件 (第 2 種境界条件) と呼ぶ。また、関数の値とその微分の値の線形結合を与える境界条件は Robin 境界条件 (第 3 種境界条件) と呼ばれる。

^{*24} 「解が存在すること」と「解が存在するならば一意である」は別問題。領域 V が単純な形をしている場合には、変数分離法などを用いて具体的な解を構成することができる。解の存在を一般的に示すにはやや込み入った議論が必要になるので、このノートでは扱わない。与えられた境界条件を満たす Poisson 方程式の解が存在することは、物理的には尤もである。

B.2.1 調和関数の平均値の定理

ある領域で Laplace 方程式 $\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = 0$ を満たす調和関数 $\varphi(\mathbf{r})$ を考える．領域の任意の点を中心とする半径 a の球 V_a をとる．ただし，半径 a は球 V_a が Laplace 方程式が成り立つ領域内に収まるように選ぶ．球の中心を原点として一般性を失わない． V_a の境界である半径 a の球面 $S_a = \partial V_a$ 上の $\varphi(\mathbf{r})$ の平均値 $\bar{\varphi}(a)$ は，

$$\bar{\varphi}(a) = \frac{1}{S_a} \oint_{S_a} \varphi(\mathbf{r}) dS = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_a} \varphi(a, \Omega) d\Omega \quad (\text{B.14})$$

と書ける．ここで，球座標 (r, Ω) をとり，^{*25} 球面 S_a 上では dS が立体角要素 $d\Omega$ を用いて $dS = a^2 d\Omega$ と書けることを用いた．これを a で微分して，Gauss の発散定理と Laplace 方程式 $\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = 0$ を用いると，

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\varphi}(a)}{da} &= \frac{1}{4\pi} \oint_{S_a} \frac{\partial \varphi(a, \Omega)}{\partial a} d\Omega = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_a} (\nabla \varphi(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{e}_r d\Omega = \frac{1}{4\pi a^2} \oint_{S_a} (\nabla \varphi(\mathbf{r})) \cdot a^2 d\Omega \mathbf{e}_r \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \oint_{S_a} (\nabla \varphi(\mathbf{r})) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{V_a} (\nabla^2 \varphi(\mathbf{r})) dV = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

が示される．4 つ目の等号では $d\mathbf{S} = a^2 d\Omega \mathbf{e}_r$ を用いた．この結果は $\bar{\varphi}(a)$ が a に依存しないことを意味するので，

$$\frac{1}{S_a} \oint_{S_a} \varphi(\mathbf{r}) dS = \bar{\varphi}(a) = \lim_{a \rightarrow +0} \bar{\varphi}(a) = \varphi(\mathbf{0}) \quad (\text{B.16})$$

が得られる．Laplace 演算子 ∇^2 は座標並進変換の下で不変であるから，位置 $\mathbf{r}$ での値 $\varphi(\mathbf{r})$ は，座標並進変換によって

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{S_a} \oint_{S_a(\mathbf{r})} \varphi(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) dS' \quad (\text{B.17})$$

と表すことができる．ここで， $S_a(\mathbf{r})$ は $\mathbf{r}$ を中心とする半径 a の球面を表す．この結果は，**調和関数の平均値の定理**として知られている．任意の半径 a の球面 S_a に対して平均値の定理が成り立つことから， $\mathbf{r}$ を中心とする任意の半径 a の球 $V_a(\mathbf{r})$ に対しても，平均値の定理

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{V_a} \int_{V_a(\mathbf{r})} \varphi(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) dV' \quad (\text{B.18})$$

が成り立つことがわかる． $V_a = 4\pi a^3/3$ は V_a の体積である．

§ 点電荷を用いた調和関数の平均値の定理の証明 半径 a の球 V_a 内に電荷が存在しないとき，静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ は V_a で Laplace 方程式 $\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = 0$ を満たす．球の中心から $R (> a)$ だけ離れた点に点電荷 q を置いたとき，点電荷がつくるポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ の $S_a = \partial V_a$ 上での平均値は，

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_a} \oint_{S_a} \phi(\mathbf{r}) dS &= \frac{1}{4\pi a^2} \oint_{S_a} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |a\mathbf{e}_r - R\mathbf{e}_z|} dS \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi a^2 \int_{-1}^1 d(\cos \theta) (a^2 + R^2 + 2aR \cos \theta)^{-1/2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2aR} \left[(a^2 + R^2 + 2aR \cos \theta)^{1/2} \right]_{\cos \theta = -1}^{\cos \theta = 1} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2aR} ((a+R) + |a-R|) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \phi(\mathbf{0}) \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

となり，^{*26} 点電荷が球 V_a の中心につくるポテンシャルと等しい．球 V_a の外部の任意の電荷分布は点電荷の重ね合わせとして与えられるから，調和関数の平均値の定理が示された．

B.2.2 調和関数の最大値原理

調和関数 $\varphi(\mathbf{r})$ が領域 V 内部のある点で極小値をとるとする．この点を原点として一般性を失わない．つまり，十分に小さな実数 ϵ を半径とする原点中心の球面 S_ϵ 上で， $\varphi(\mathbf{0}) < \varphi(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r} \in S_\epsilon$) が成り立つ．このとき，

$$\frac{1}{S_\epsilon} \oint_{S_\epsilon} \varphi(\mathbf{r}) dS > \frac{1}{S_\epsilon} \oint_{S_\epsilon} \varphi(\mathbf{0}) dS = \varphi(\mathbf{0}) \frac{1}{S_\epsilon} \oint_{S_\epsilon} dS = \varphi(\mathbf{0}), \quad (\text{B.20})$$

^{*25} 角度座標の組を Ω と書いた．表記の簡略化と，球面座標と関数に同じ文字 φ が現れるのを防ぐのが目的．

^{*26} 球内部 ($R < a$) に点電荷を置くと， $|a-R| = a-R$ より， $\frac{1}{S_a} \oint_{S_a} \phi(\mathbf{r}) dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$ となる．この平均値は球内の点電荷の場所に依らない．

となるが、これは B.2.1 節で示した調和関数の平均値の定理

$$\varphi(\mathbf{0}) = \frac{1}{S_a} \oint_{S_a} \varphi(\mathbf{r}) dS \quad (\text{B.21})$$

と矛盾する。したがって、調和関数 $\varphi(\mathbf{r})$ は領域 V 内部で極小値をとらない。極大値についても同様である。この結果は物理学において Earnshaw の定理として知られている。^{*27} $V \cup \partial V$ は有界閉集合であるから、 $\varphi(\mathbf{r})$ は $V \cup \partial V$ 上で最大値と最小値をとる。ところが、 $\varphi(\mathbf{r})$ は領域 V 内部で極値をとらないから、 V で最大値と最小値をとらない。したがって、 $\varphi(\mathbf{r})$ は境界 ∂V 上で最大値と最小値をとる。

^{*27} Earnshaw の定理は「静電場のある真空領域に荷電粒子を置いたとき、静電気力だけで安定なつりあいを保つことはできない」というもの。