面素ベクトルの計算方法

曲面 S の面素ベクトル $d\boldsymbol{S}$ を計算する 2 通りの方法を示す．面素ベクトル $d\boldsymbol{S}$ には向き (符号) の不定性があるので，適宜調整する必要がある．閉曲面の面素ベクトルは面の外側を向くようにとるのが一般的である．なお，このノートでは縦ベクトルと横ベクトルは区別せずに用いる．

面素ベクトルの計算方法 (1)

1. 曲面 S 上の点 $\boldsymbol{r}$ を媒介変数表示する．

$$\boldsymbol{r}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)] \ .$$

2. 媒介変数 u と v が微小量だけ変化したときの $\boldsymbol{r}$ の変化 (微小変位) $d\boldsymbol{r}_u$ と $d\boldsymbol{r}_v$ を計算する．

$$d\boldsymbol{r}_u \equiv \boldsymbol{r}(u+du,v) - \boldsymbol{r}(u,v) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\, du = [x_u, y_u, z_u]\, du \ ,$$
$$d\boldsymbol{r}_v \equiv \boldsymbol{r}(u,v+dv) - \boldsymbol{r}(u,v) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\, dv = [x_v, y_v, z_v]\, dv \ .$$

3. 面素ベクトル $d\boldsymbol{S} = d\boldsymbol{r}_u \times d\boldsymbol{r}_v$ を計算する．

$$d\boldsymbol{S} = d\boldsymbol{r}_u \times d\boldsymbol{r}_v = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{bmatrix} dudv = \begin{bmatrix} y_u z_v - z_u y_v \\ z_u x_v - x_u z_v \\ x_u y_v - y_u x_v \end{bmatrix} dudv \ .$$

面素ベクトルの計算方法 (2)

1. 曲面 S を $z = f(x,y)$ と表す．このとき，曲面 S 上の点 $\boldsymbol{r}$ は以下のように表すことができる．[a]

$$\boldsymbol{r}(x,y) = [x, y, f(x,y)] \ .$$

2. x と y が微小量だけ変化したときの $\boldsymbol{r}$ の変化 (微小変位) $d\boldsymbol{r}_x$ と $d\boldsymbol{r}_y$ を計算する．

$$d\boldsymbol{r}_x \equiv \boldsymbol{r}(x+dx,y) - \boldsymbol{r}(x,y) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\, dx = [1, 0, z_x]\, dx \ ,$$
$$d\boldsymbol{r}_y \equiv \boldsymbol{r}(x,y+dy) - \boldsymbol{r}(x,y) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\, dy = [0, 1, z_y]\, dy \ .$$

3. 面素ベクトル $d\boldsymbol{S} = d\boldsymbol{r}_x \times d\boldsymbol{r}_y$ を計算する．

$$d\boldsymbol{S} = d\boldsymbol{r}_x \times d\boldsymbol{r}_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{bmatrix} dxdy = \begin{bmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{bmatrix} dxdy \ ,$$

[a] このとき $\boldsymbol{r}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)] = [u, v, z(u,v)]$ と書けるので，これは変数 $x\,(=u)$ と $y\,(=v)$ による媒介変数表示と見ることができ，あとは方法 (1) と全く同様にして計算できる．

付録： 曲面積の公式　$z = f(x,y)$ で表される曲面 S の面素ベクトル $d\boldsymbol{S}$ の大きさ dS は,

$$dS = |d\boldsymbol{S}| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy \ .$$

と表されるから，曲面 S の面積 S は,

$$S = \int_S dS = \int_D dxdy \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \ ,$$

と，重積分として計算することができる．ここで，積分領域 D は，曲面 S を x-y 平面に射影した領域である．