球座標の Laplace 演算子の導出

必要最低限の知識を用いた球座標の Laplace 演算子の導出．同様の手法は 2 次元極座標の場合にも適用可 (付録 A)．2 次元極座標の Laplace 演算子を用いて球座標の Laplace 演算子を導出するほうが簡単かもしれない (付録 B)．

Descartes 座標 (x, y, z) と球座標 (r, θ, ϕ) の関係は以下の通り．

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{bmatrix} .$$

球座標の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$ を以下のように導入する．[*1]

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_r &\equiv \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\right|^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = [\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta]^T , \\
\boldsymbol{e}_\theta &\equiv \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right|^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = [\cos\theta\cos\phi,\ \cos\theta\sin\phi,\ -\sin\theta]^T , \\
\boldsymbol{e}_\phi &\equiv \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\right|^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = [-\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0]^T .
\end{aligned}$$

基本ベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である．偏微分の連鎖律 (chain rule) より，

$$\begin{bmatrix} \partial_r \\ \partial_\theta \\ \partial_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r & y_r & z_r \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_\phi & y_\phi & z_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\phi & r\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} .$$

係数を調整すると，以下のように書き直すことができる．

$$\begin{bmatrix} \partial_r \\ r^{-1}\partial_\theta \\ (r\sin\theta)^{-1}\partial_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} = [\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi]^T \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} .$$

正規直交基底を並べた行列 $[\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi]$ は $[\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi]^{-1} = [\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi]^T$ を満たす直交行列であるから，逆に解いて，

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} = [\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi] \begin{bmatrix} \partial_r \\ r^{-1}\partial_\theta \\ (r\sin\theta)^{-1}\partial_\phi \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_r\partial_r + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta + \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi$$

を得る．[*2] 基本ベクトルの (r, θ, ϕ) についての偏微分は (見やすさのために行列の表記を借りると) 以下の通り．

$$\begin{pmatrix} \partial_r\boldsymbol{e}_r & \partial_\theta\boldsymbol{e}_r & \partial_\phi\boldsymbol{e}_r \\ \partial_r\boldsymbol{e}_\theta & \partial_\theta\boldsymbol{e}_\theta & \partial_\phi\boldsymbol{e}_\theta \\ \partial_r\boldsymbol{e}_\phi & \partial_\theta\boldsymbol{e}_\phi & \partial_\phi\boldsymbol{e}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_\phi\sin\theta \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{e}_\phi\cos\theta \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{e}_r\sin\theta - \boldsymbol{e}_\theta\cos\theta \end{pmatrix} .$$

基本ベクトルの直交性と偏微分から，Laplace 演算子は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}
\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla &= \left(\boldsymbol{e}_r\partial_r + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta + \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\right)\cdot\left(\boldsymbol{e}_r\partial_r + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta + \boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\right) \\
&= \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\partial_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2 \\
&= \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\left[\partial_\theta^2 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\partial_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2\right] \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] .
\end{aligned}$$

[*1] 適当な座標系における座標 α に対する基本ベクトル $\boldsymbol{e}_\alpha$ は，座標 α が微小変化したときの位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の変化方向の単位ベクトルとして，$\boldsymbol{e}_\alpha \equiv \left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}\right|^{-1}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha}$ で定義される．

[*2] 直交行列の性質など行列 (線形代数) に慣れていない場合は，$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{bmatrix}$ を逆に解いて $\begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan^{-1}(\sqrt{x^2+y^2}/z) \\ \tan^{-1}(y/x) \end{bmatrix}$ としてから，連鎖律を使って直接 $[\partial_r, \partial_\theta, \partial_\phi]^T$ を求めることもできる．しかし，本文の計算のほうが簡単なので，これくらいの行列の知識はあったほうがよい．$[\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi]$ が直交行列になるのは，球座標が直交座標系であることによる．

付録 A. 2 次元極座標の Laplace 演算子の導出

2 次元 Descartes 座標 (x, y) と 2 次元座標 (r, θ) の関係と，2 次元極座標の基本ベクトルは以下の通り．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix} \ , \\
\boldsymbol{e}_r &\equiv \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r}\right|^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \ , \\
\boldsymbol{e}_\theta &\equiv \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right|^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \ .
\end{aligned}$$

基本ベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta\}$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底である．偏微分の連鎖律 (chain rule) より，

$$\begin{bmatrix} \partial_r \\ r^{-1}\partial_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r & y_r \\ r^{-1}x_\theta & r^{-1}y_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} \ .$$

正規直交基底を並べた行列 $[\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta]$ は $[\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta]^{-1} = [\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta]^T$ を満たす直交行列であるから，逆に解いて，

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} = [\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta] \begin{bmatrix} \partial_r \\ r^{-1}\partial_\theta \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_r\partial_r + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta$$

を得る．$\partial_r\boldsymbol{e}_r = \partial_r\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{0}$ と $\partial_\theta\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_\theta$，$\partial_\theta\boldsymbol{e}_\theta = -\boldsymbol{e}_r$ を用いると，Laplace 演算子は以下のように計算できる．

$$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \left(\boldsymbol{e}_r\partial_r + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta\right)\cdot\left(\boldsymbol{e}_r\partial_r + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta\right) = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ .$$

付録 B. 2 次元極座標の Laplace 演算子を用いた球座標の Laplace 演算子の導出

Descartes 座標 (x, y, z) と球座標 (r, θ, ϕ) の関係は，補助変数 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ を用いて

$$\begin{bmatrix} z \\ \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix} \ , \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \end{bmatrix} \ ,$$

と書くことができる．それぞれが 2 次元 Descartes 座標と 2 次元極座標の関係になっていることを用いると，

$$\begin{aligned}
\nabla^2 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \\
&= \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \\
&= \frac{1}{r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]
\end{aligned}$$

と計算できる．3 行目から 4 行目の変形では，

$$\begin{bmatrix} \partial_z \\ \partial_\rho \end{bmatrix} = [\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta] \begin{bmatrix} \partial_r \\ r^{-1}\partial_\theta \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_r\partial_r + \boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta\,\partial_r - r^{-1}\sin\theta\,\partial_\theta \\ \sin\theta\,\partial_r + r^{-1}\cos\theta\,\partial_\theta \end{bmatrix}$$

より得られる

$$\frac{\partial}{\partial\rho} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

を用いた．