2 変数関数の極値と Hesse 行列【微分積分】

2 変数関数の極値問題についての初学者向けの解説．1 変数関数の極値の求め方の復習から始め，同じ考え方で 2 変数関数の極値問題にアプローチする．このノートでは Hesse 行列を用いた極値の判定法が適用できる C^2 級関数 (2 回微分可能で 2 階 (偏) 導関数が連続な関数) のみを考えるが，部分的に条件を緩められる主張については脚注で補足する．Taylor 展開 (漸近展開) と行列の対角化の知識を仮定する．

1 変数関数の極値

1 変数関数が極値をとるための必要条件　ある点 $x=a$ の近くでの関数 $f(x)$ の増減を考える．[1] $x=a$ からの変位 Δx に対する $f(x)$ の変化を

$$\Delta f(a;\Delta x) \equiv f(a+\Delta x) - f(a)$$

と書こう．このとき，関数 $f(x)$ が極値をとるとは，以下のように定義される．

- 任意の微小変位 Δx $(\neq 0)$ に対して $\Delta f(a;\Delta x) > 0$ となるとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ で**極小値**をとる．[2]
- 任意の微小変位 Δx $(\neq 0)$ に対して $\Delta f(a;\Delta x) < 0$ となるとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ で**極大値**をとる．
- 微小変位 Δx の符号に依存して $\Delta f(a;\Delta x)$ の符号が変わるとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ で極値をとらない．

関数 $f(x)$ が極大値・極小値をとる点のことを，**極大点・極小点** (あわせて**極値点**) と呼ぶ．関数 $f(x)$ の $x=a$ 付近での振舞いは，Taylor 展開 (漸近展開) で調べることができる．[3]

$$f(a+\Delta x) = f(a) + f'(a)\Delta x + o(\Delta x)\ . \quad (\Delta x \to 0)$$

ここで $f'(a)\neq 0$ であれば，Δx の符号に応じて $\Delta f(a;\Delta x) = f'(a)\Delta x + o(\Delta x)$ の符号が変化するから，関数 $f(x)$ は $x=a$ で極値をとらない．したがって，この対偶をとることで，関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば，

$$f'(a) = 0$$

であることがわかる．[4] これは必要条件であり，十分条件ではないことに注意．[5] $f'(a)=0$ を満たす点のことを**停留点** (stationary point) または**臨界点** (critical point) と呼ぶ．停留点が極値をとる点の候補を与える．

1 変数関数が極値をとるための十分条件　$f'(a)=0$ を満たす停留点 $x=a$ の周りで，

$$f(a+\Delta x) = f(a) + \frac{1}{2}f''(a)\Delta x^2 + o(\Delta x^2)$$

と展開できる．展開の 1 次の項 $f'(a)\Delta x$ は停留点の条件 $f'(a)=0$ で消えていることに注意．停留点 $x=a$ からの微小変位 Δx に対する $f(x)$ の変化は，

$$\Delta f(a;\Delta x) \equiv f(a+\Delta x) - f(a) = \frac{1}{2}f''(a)\Delta x^2 + o(\Delta x^2)$$

と評価できる．停留点からの微小変化 $\Delta f(a;\Delta x)$ の表式から，$f(x)$ の極値について以下のような判定ができる．

- $f''(a) > 0$ ならば，任意の微小変位 Δx $(\neq 0)$ に対して $\Delta f(a;\Delta x) > 0$ となるから，$x=a$ は**極小点**である．
- $f''(a) < 0$ ならば，任意の微小変位 Δx $(\neq 0)$ に対して $\Delta f(a;\Delta x) < 0$ となるから，$x=a$ は**極大点**である．
- $f''(a) = 0$ のときは，$x=a$ が極値点かどうか判定できない．この場合には，無視していた $o(\Delta x^2)$ の部分が重要になる．$f(x)$ が高階微分可能な場合には，より高次の導関数を調べるなどの方法がある．[6]

---

[1] $f(x)$ は関数 f の x における値であるが，$f(x)$ を関数と呼んでしまうことにする．

[2] もう少し正確には「a を含むある開区間 I があって，任意の $x\in I\setminus\{a\}$ に対して $f(x) > f(a)$ となるとき，関数 $f(x)$ は $x=a$ で極小値をとる」と定義する．極大値についても同様．等号を入れて，$\Delta f(a;\Delta x)\geq 0$ のとき極小値，$\Delta f(a;\Delta x)\leq 0$ のとき極大値と定義することもある．たとえば，定数関数は狭義には極値をとらないが，広義には任意の点で極大値かつ極小値をとる．このノートでは狭義の定義を採用する．

[3] $f(x)$ が a を含む開区間で C^1 級であれば 1 次の漸近展開ができる．平均値の定理より $f(a+\Delta x) = f(a) + f'(a+\theta\Delta x)\Delta x = f(a) + f'(a)\Delta x + \big(f'(a+\theta\Delta x) - f'(a)\big)\Delta x$ を満たす $\theta\in(0,1)$ が存在する．$f'(x)$ の連続性より $\Delta x\to 0$ で $f'(a+\theta\Delta x) - f'(a)\to 0$ なので，$\big(f'(a+\theta\Delta x) - f'(a)\big)\Delta x = o(\Delta x)$ である．

[4] これは $f(x)$ が a で微分可能であれば言える．$f(x)$ が a で極小値をとるから，$f(x)$ の定義域をある開区間 I に制限すると $f(x)$ は a で最小値をとる．$h\neq 0$ に対して $a+h\in I$ であれば $f(a+h)-f(a) > 0$ であるから $\lim_{h\to +0}\big(f(a+h)-f(a)\big)/h \geq 0$ かつ $\lim_{h\to -0}\big(f(a+h)-f(a)\big)/h \leq 0$ が成り立つので，$f'(a) = \lim_{h\to 0}\big(f(a+h)-f(a)\big)/h = 0$ である．

[5] $f(x)=x^3$ は $x=0$ で $f'(0)=0$ となるが，$x>0$ では $f(x)>0$，$x<0$ では $f(x)<0$ であるから，この点で極小値も極大値もとらない．

[6] $f(x)=x^3$ の場合には $f''(0)=0$ となり，$f'''(0)=6\neq 0$ を調べてはじめて $x=0$ が極値点ではないことがわかる．$f(x)=x^4$ の場合には $f^{(4)}(0)=24>0$ を調べてはじめて $x=0$ が極小点であることがわかる．ただし，前者は脚注 5 の議論，後者は $x\neq 0$ に対して $f(x)=x^4>0=f(0)$ であることを言えば十分で，必ずしも導関数を調べる必要はない．

2 変数関数の極値

1 変数関数の極値を調べたのと同様の手法で，2 変数関数 $f(x,y)$ の極値を調べることができる．途中までの議論は 1 変数関数の場合と完全に対応しているので，対比させながら読むとよい．

2 変数関数の極値点の定義　ある点 $(x,y)=(a,b)$ の近くでの関数 $f(x,y)$ の増減を考える．(a,b) からの変位 $(\Delta x,\Delta y)$ に対して，

$$\Delta f(a,b) \equiv f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)$$

と書く．本来なら 1 変数関数の場合と同様に $\Delta f(a,b;\Delta x,\Delta y)$ などと書くべきだが，煩わしいので $(\Delta x,\Delta y)$ は省略した．このとき，1 変数関数の場合と同様に，関数 $f(x,y)$ が極値をとるとは，以下のように定義される．

- 任意の微小変位 $(\Delta x,\Delta y)\neq(0,0)$ に対して $\Delta f(a,b)>0$ のとき，(a,b) は極小点である.[7]
- 任意の微小変位 $(\Delta x,\Delta y)\neq(0,0)$ に対して $\Delta f(a,b)<0$ のとき，(a,b) は極大点である．
- 微小変位 $(\Delta x,\Delta y)$ に依存して $\Delta f(a,b)$ の符号が変わるとき，(a,b) は極値点ではない．

1 変数関数の場合の微小変位 Δx の "方向" が正負の 2 通りしか無かったのに対して，2 変数関数の場合の変位 $(\Delta x,\Delta y)$ の方向には，360° の自由度があることに注意が必要である．

2 変数関数が極値をとるための必要条件　ある点 $(x,y)=(a,b)$ の周りでの関数 $f(x,y)$ の振舞いは，Taylor 展開 (漸近展開) を用いて調べることができる.[8]

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) = f(a,b) + f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + o\Big(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\Big)\ . \quad \big((\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\big)$$

もし $f_x(a,b)\neq 0$ であれば，$(\Delta x,\Delta y)=(+\epsilon,0)$ と $(\Delta x,\Delta y)=(-\epsilon,0)$ という 2 つの方向で $\Delta f(a,b)$ の符号が異なるから，そのような (a,b) は極値点ではない．$f_y(a,b)\neq 0$ の場合も同様である．したがって，この対偶をとることで，関数 $f(x,y)$ が点 $(x,y)=(a,b)$ で極値をとるためには，

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$

が必要であることがわかる.[9] 条件 $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ を満たす点を**停留点**または**臨界点**と呼ぶ．1 変数関数の場合と同様，この条件も極値をとるための必要条件であり，十分条件ではない．停留点で極値をとらない場合，その点を**鞍点** (saddle point) と呼ぶ.[10]

停留点付近での関数の振舞い　$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ を満たす停留点 (a,b) の周りで，関数 $f(x,y)$ は，

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) = f(a,b) + \frac{1}{2}\Big(\bar f_{xx}\Delta x^2 + 2\bar f_{xy}\Delta x\Delta y + \bar f_{yy}\Delta y^2\Big) + o(\Delta x^2+\Delta y^2)\ . \quad \big((\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\big)$$

と展開できる．ここで，表記の簡略化のために，(a,b) で評価した値を $\bar f$ のように表した．たとえば，$\bar f_{xx}=f_{xx}(a,b)$ である.[11] 停留点 $(x,y)=(a,b)$ からの微小変位 $(\Delta x,\Delta y)$ に対する $f(x,y)$ の変化は，

$$\begin{aligned}\Delta f(a,b) &\equiv f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\bar f_{xx}\Delta x^2 + 2\bar f_{xy}\Delta x\Delta y + \bar f_{yy}\Delta y^2\Big) + o(\Delta x^2+\Delta y^2)\ . \quad \big((\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\big)\end{aligned}$$

と評価できる．1 変数関数の場合と異なり，関数の値の変化 $\Delta f(a,b)$ が 3 つの項 (と微小項) の和で表されており，特に $\Delta x\Delta y$ の項の存在により，この表式を見て直ちに $\Delta f(a,b)$ の正負を判定することはできない．$\Delta f(a,b)$ は **2 次形式**と呼ばれる形をしており，その解析には線形代数の知識を用いることができる．

---

[7] もう少し正確には「(a,b) を含むある領域 (連結開集合) D があって，任意の $(x,y)\in D\setminus\{(a,b)\}$ に対して $f(x,y)>f(a,b)$ となるとき，関数 $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で極小値をとる」と定義する．

[8] $f(x,y)$ が (a,b) を含む領域で C^1 級であれば 1 次の漸近展開ができる．2 変数の平均値の定理を用いて脚注 3 と同様に証明できる．

[9] これは $f(x,y)$ が (a,b) で偏微分可能であれば言える．$f(x,y)$ が (a,b) で極値をとるので，$y=b$ を固定した 1 変数関数 $f(x,b)$ は $x=a$ で極値をとり，$f_x(a,b)=0$ である．同様に $f_y(a,b)=0$ も言える．

[10] 極大点・極小点に狭義・広義の定義があったことに伴い，鞍点にも狭義・広義の定義がある．

[11] この表記は一般的ではないので，他では (定義せずに) 使ってはならない．

Hesse 行列の導入　これ以降，$\Delta f(a,b)$ の引数を省略して単に Δf と書くことにする．Δf は行列を用いて

$$2\Delta f = [\Delta x\ \Delta y] \begin{bmatrix} \bar{f}_{xx} & \bar{f}_{xy} \\ \bar{f}_{xy} & \bar{f}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

と書くことができる．右辺が見やすいように全体に 2 を掛けた．また，微小項は無視した．ここに現れる実対称行列

$$H \equiv \begin{bmatrix} \bar{f}_{xx} & \bar{f}_{xy} \\ \bar{f}_{xy} & \bar{f}_{yy} \end{bmatrix}$$

は **Hesse 行列** (Hessian matrix) と呼ばれる．Hesse 行列 H は実対称行列なので，直交行列 O を用いて

$$O^T H O = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

と直交対角化することができる．λ_1 と λ_2 は Hesse 行列の固有値であり，Hesse 行列が実対称行列であることから，共に実数である.[12] 直交行列 O を用いて

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix} = O^T \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

と変換すると，以下のように Δf を「2 乗の和」の形に書き直すことができる.[13]

$$2\Delta f = [\Delta X\ \Delta Y] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix} = \lambda_1 (\Delta X)^2 + \lambda_2 (\Delta Y)^2 \ .$$

$(\Delta x, \Delta y)$ と $(\Delta X, \Delta Y)$ が一対一に対応することに注意すると，Hesse 行列の 2 つの固有値 λ_1, λ_2 の正負と Δf の正負の関係について以下のことが言える．

- 固有値が共に正の場合，任意の微小変位 $(\Delta X, \Delta Y) \neq (0,0)$ に対して $\Delta f > 0$ より，(a,b) は極小点である．
- 固有値が共に負の場合，任意の微小変位 $(\Delta X, \Delta Y) \neq (0,0)$ に対して $\Delta f < 0$ より，(a,b) は極大点である．
- 固有値の符号が異なる場合，2 つの方向 $(\Delta X, \Delta Y) = (\epsilon, 0)$ と $(\Delta X, \Delta Y) = (0, \epsilon)$ とで Δf の符号が異なる．つまり，(a,b) は極値点ではなく，鞍点である．
- 固有値が 0 を含む場合，$(\Delta X, \Delta Y) = (\epsilon, 0)$ または $(\Delta X, \Delta Y) = (0, \epsilon)$ の方向で $\Delta f = 0$ となり，この方向の関数 $f(x,y)$ の増減を判定できない．この場合には無視していた微小項を調べなくてはならない．

Hesse 行列の固有値と関数が極値をとる条件　これまでの議論で，関数 $f(x,y)$ の停留点 (a,b) が極値点か否かは，Hesse 行列の固有値によって決まることがわかった．Hesse 行列の固有値は，固有値方程式

$$0 = |\lambda E - H| = \lambda^2 - (\bar{f}_{xx} + \bar{f}_{yy})\lambda + \left(\bar{f}_{xx}\bar{f}_{yy} - (\bar{f}_{xy})^2 \right) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} H)\lambda + \det H \ ,$$

の解として求まる．ここで，$\operatorname{tr} H$ は Hesse 行列のトレース，$\det H$ は行列式である．Hesse 行列の行列式 (Hessian determinant) は，単に**ヘッシアン** (Hessian) と呼ばれることが多い．固有値方程式を解いて固有値 λ を求めてもよいが，必要なのは固有値 λ の値そのものではなく λ の正負であるから，2 次方程式の解と係数の関係を用いればよい.[14]

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} H \ , \quad \lambda_1 \lambda_2 = \det H \ ,$$

が成り立つから，以下の条件が得られる．

- 極小点　$\Longleftrightarrow$　H の固有値が共に正　$\Longleftrightarrow$　$\lambda_1\lambda_2 > 0 \ , \ \lambda_1 + \lambda_2 > 0$　$\Longleftrightarrow$　$\det H > 0 \ , \ \operatorname{tr} H > 0$ ．
- 極大点　$\Longleftrightarrow$　H の固有値が共に負　$\Longleftrightarrow$　$\lambda_1\lambda_2 > 0 \ , \ \lambda_1 + \lambda_2 < 0$　$\Longleftrightarrow$　$\det H > 0 \ , \ \operatorname{tr} H < 0$ ．
- 極値点でない (鞍点)　$\Longleftrightarrow$　H の固有値の符号が異なる　$\Longleftrightarrow$　$\lambda_1\lambda_2 < 0$　$\Longleftrightarrow$　$\det H < 0$ ．
- 極値点か否か判定できない　$\Longleftrightarrow$　H の固有値に 0 を含む　$\Longleftrightarrow$　$\lambda_1\lambda_2 = 0$　$\Longleftrightarrow$　$\det H = 0$ ．

---

[12] H は実対称行列であるから，Hermite 共役は $H^\dagger \equiv (H^*)^T = H$ を満たす．固有値を λ，固有ベクトルを $\boldsymbol{v}$ $(\neq \boldsymbol{0})$ として $H\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ の Hermite 共役をとると，$\boldsymbol{v}^\dagger H = \lambda^* \boldsymbol{v}^\dagger$．両辺の差をとり $\boldsymbol{v}$ を右からかけると，$0 = \boldsymbol{v}^\dagger H \boldsymbol{v} - \lambda^* \boldsymbol{v}^\dagger \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^\dagger (\lambda \boldsymbol{v}) - \lambda^* \boldsymbol{v}^\dagger \boldsymbol{v} = (\lambda - \lambda^*) \boldsymbol{v}^\dagger \boldsymbol{v}$．ここで，$\boldsymbol{v} = [v_1, v_2]^T \neq \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{v}^\dagger \boldsymbol{v} = |v_1|^2 + |v_2|^2 \neq 0$ であるから，$\lambda - \lambda^* = 0$．したがって $\lambda = \lambda^*$ より λ は実数．

[13] $OO^T = I$(単位行列) を用いて，$[\Delta x\ \Delta y] H \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = [\Delta x\ \Delta y] O O^T H O O^T \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = [\Delta X\ \Delta Y] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix} = \lambda_1 (\Delta X)^2 + \lambda_2 (\Delta Y)^2$.

[14] 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解を α と β とすると，$\alpha + \beta = -b/a \ , \ \alpha\beta = c/a$ が成り立つ．

2 変数関数の極値点の求め方

関数 $f(x,y)$ に対して

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$

を満たす停留点 (a,b) を求める．停留点において，Hesse 行列

$$H(a,b) \equiv \begin{bmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{bmatrix}$$

を定義する．Hesse 行列の行列式 (Hessian) とトレースの正負により，以下のように分類できる．

$\det H > 0$	$\operatorname{tr} H > 0$	極小点
	$\operatorname{tr} H < 0$	極大点
$\det H < 0$		極値点でなはい (鞍点)
$\det H = 0$		この方法では判定できない

ちなみに，$\det H > 0$ のときには $\bar{f}_{xx}$ と $\bar{f}_{yy}$ が同符号で $\operatorname{tr} H$ の符号と一致するから,[15] $\bar{f}_{xx}$ の方だけを見て，

- $\det H = \bar{f}_{xx}\bar{f}_{yy} - (\bar{f}_{xy})^2 > 0$ かつ $\bar{f}_{xx} > 0 \iff (a,b)$ は極小点
- $\det H = \bar{f}_{xx}\bar{f}_{yy} - (\bar{f}_{xy})^2 > 0$ かつ $\bar{f}_{xx} < 0 \iff (a,b)$ は極大点

と書いてある教科書がほとんどである．もちろん $\bar{f}_{xx}$ の代わりに $\bar{f}_{yy}$ の符号を見てもよい．

3 変数以上の関数には Hesse 行列の行列式とトレース (あるいは $\bar{f}_{xx}$) を用いた判定方法は適用できないが，Hesse 行列の固有値を調べることで極値の判定ができる点は同じである．

付録：Hesse 行列を用いない極値の判定方法

$\Delta f(a,b)$ の引数を省略して Δf と書き，微小項は無視する．

$$2\Delta f = \bar{f}_{xx}\Delta x^2 + 2\bar{f}_{xy}\Delta x \Delta y + \bar{f}_{yy}\Delta y^2 \ .$$

(i) $\bar{f}_{xx} = \bar{f}_{yy} = \bar{f}_{xy} = 0$ のとき： $\Delta f = 0$ なので，(a,b) が極値点か否か判定できない．

(ii) $\bar{f}_{xx} = \bar{f}_{yy} = 0$ かつ $\bar{f}_{xy} \neq 0$ のとき： $\Delta f = \bar{f}_{xy}\Delta x \Delta y$ となるが，$(\Delta x, \Delta y) = (\epsilon, \epsilon)$ と $(\Delta x, \Delta y) = (\epsilon, -\epsilon)$ とで Δf の符号が異なるので，(a,b) は極値点ではない．

(iii) $\bar{f}_{xx} \neq 0$ または $\bar{f}_{yy} \neq 0$ のとき： 議論は x と y について対称であるから，$\bar{f}_{xx} \neq 0$ として一般性を失わない．このとき，$2\Delta f$ を平方完成すると，

$$2\Delta f = \bar{f}_{xx}\Delta x^2 + 2\bar{f}_{xy}\Delta x \Delta y + \bar{f}_{yy}\Delta y^2 = \bar{f}_{xx}\left(\left(\Delta x + \frac{\bar{f}_{xy}}{\bar{f}_{xx}}\Delta y\right)^2 + \frac{1}{(\bar{f}_{xx})^2}\Big(\bar{f}_{xx}\bar{f}_{yy} - (\bar{f}_{xy})^2\Big)\Delta y^2\right)$$

となる．したがって，

- $\bar{f}_{xx}\bar{f}_{yy} - (\bar{f}_{xy})^2 > 0$ のとき

  $\bar{f}_{xx} > 0$ なら $\Delta f > 0$ であるから極小点，$\bar{f}_{xx} < 0$ なら $\Delta f < 0$ であるから極大点となる．
- $\bar{f}_{xx}\bar{f}_{yy} - (\bar{f}_{xy})^2 < 0$ のとき

  $(\Delta x, \Delta y) = (\epsilon, 0)$ と $(\Delta x, \Delta y) = \epsilon(\bar{f}_{xy}, -\bar{f}_{xx})$ の方向で Δf の符号が異なるので，極値点ではない．
- $\bar{f}_{xx}\bar{f}_{yy} - (\bar{f}_{xy})^2 = 0$ のとき

  $(\Delta x, \Delta y) = \epsilon(\bar{f}_{xy}, -\bar{f}_{xx})$ の方向で $\Delta f = 0$ となるから，極値点か否か判定できない．

以上をまとめると，Hesse 行列を用いた場合と同じ結論が得られる．2 つの判定方法を見比べるとわかるように，Hesse 行列を用いた議論の方が体系的でわかりやすく，3 変数以上の関数への拡張も容易である．

[15] $(\bar{f}_{xy})^2 \geq 0$ であるから，$\det H = \bar{f}_{xx}\bar{f}_{yy} - (\bar{f}_{xy})^2 > 0$ のためには $\bar{f}_{xx}\bar{f}_{yy} > 0$ が必要であり，$\bar{f}_{xx}$ と $\bar{f}_{yy}$ は同符号である．